МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ ЗАОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. Н. ЛЫЧКИН, В. А. КАПИТОНОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
в задачах и упражнениях

Москва 2013

УДК 517(075. 8)

Рецензенты:
д. ф.-м. н., профессор *А.В. Юденков* (ФГОУ ВПО «Смоленская ГСХА»);
д.т.н., профессор С.А. Редкозубов (ФГОУ ВПО «Московский ГГУ»)

Лычкин В.Н.
Математический анализ в задачах и упражнениях: учеб. пособие/ В.Н. Лычкин, В.А. Капитонова // ФГБОУ ВПО РГАЗУ. - М.: Изд-во ФГБОУ ВПО РГАЗУ, 2013. - 261 с.

Учебное пособие предназначено для студентов 1 и 2 курсов инженерно–технических и экономического направлений подготовки бакалавров.

УДК 517(075. 8)

Рекомендовано организационно-методической комиссией ФГБОУ ВПО РГАЗУ в качестве учебного пособия для студентов 1 и 2 курсов по направлениям подготовки: 080100 – «Экономика», 110800 – «Агроинженерия», 230400 – «Информационные системы и технологии», 280100 – «Природообустройство и водопользование», 190600 – «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов».

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Пособие предназначено студентам – заочникам инженерно – технических и экономического направлений подготовки бакалавров сельскохозяйственных высших учебных заведений.

В пособии в краткой форме приводится теоретический материал по основным разделам курса математики, необходимый для раскрытия содержания основных понятий и теорем курса.

По всем разделам математического анализа рассмотрены типовые задачи и методы их решения, приводится перечень задач для самостоятельного решения и ответы к этим задачам.

Содержание пособия соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по подготовке бакалавров инженерных и экономического направлений.

Большое количество приведенных в пособии задач и их классификация позволяют рекомендовать преподавателям и аспирантам, ведущим практические занятия по математике, использовать пособие в своей работе.

ГЛАВА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. 1. Основные понятия

Комплексным числом называется число $z = x + yi$, где x и y – действительные числа, $i = \sqrt{-1}$ - *мнимая единица.* Числа x и y называются, соответственно, *действительной* и *мнимой* частями числа z и обозначаются $x = Re\,z$, $y = Im\,z$. Такая форма комплексного числа называется *алгебраической.*

Модулем комплексного числа z называется неотрицательное число $\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Комплексное число $\bar{z} = x - yi$ называется *сопряженным* числу $z = x + yi$.

Между точками координатной плоскости xOy и комплексными числами $z = x + yi$ установлено взаимно-однозначное соответствие: каждому комплексному числу $x + yi$ соответствует точка $(x;\, y)$ и наоборот (рис. 1)

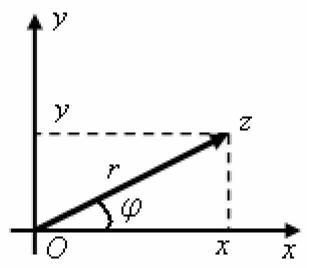


Рис. 1

С каждой точкой z связан радиус-вектор $\overline{Oz}$. Модуль вектора $\overline{Oz}$ является модулем комплексного числа z; угол φ, образованный этим радиус – вектором с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом* этого числа.

Для аргумента φ имеем: $sin\varphi = \dfrac{y}{r}$, $cos\varphi = \dfrac{x}{r}$, $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Отсюда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Тогда

$$\boldsymbol{z = x + yi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$ - *тригонометрическая форма* комплексного числа.

Показательной формой комплексного числа $z = x + yi$, модуль которого равен r, а аргумент равен φ, называется следующая форма его записи:

$$z = re^{i\varphi} \ .$$

1. 2. Действия над комплексными числами

Для комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ операции сложения, вычитания, умножения и деления введены следующим образом:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i \ . \qquad (1.\ 1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \, . \qquad (1.\ 2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}, \text{ где } x_2^2 + y_2^2 \neq 0 \qquad (1.\ 3)$$

Действия над комплексными числами $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ выполняются по следующим правилам:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \ . \qquad (1.\ 4)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \qquad (1.\ 5)$$

$$z_1^n = r_1^n (\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1). \qquad (1.\ 6)$$

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1}\left(\cos\frac{\varphi_1 + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi_1 + 2\pi k}{n}\right), \text{ где } k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (1.\ 7)$$

Действия над комплексными числами $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ выполняются по следующим правилам:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \qquad (1.\ 8)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \qquad (1.\ 9)$$

$$(z_1)^n = r_1^n e^{in\varphi_1} \ . \qquad (1.\ 10)$$

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1} e^{i\frac{\varphi_1 + 2\pi k}{n}}, \text{ где } \kappa = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \qquad (1.\ 11)$$

1. Выполнить указанные действия:

а) $(3 - 4i) + (5 + 7i)$; *б*) $(2 + 3i) \cdot (4 - 5i)$; *в*) $\dfrac{4 + 5i}{2 - 3i}$.

Решение. *а*) По правилу (1. 1) имеем:

$$(3 - 4i) + (5 + 7i) = (3 + 5) + (-4 + 7)i = 8 + 3i \, .$$

б) Правило (1. 2) умножения двух комплексных чисел равносильно умножению их как многочлена на многочлен, поэтому

$$(2+3i)\cdot(4-5i)=8-10i+12i-15i^2=8+2i+15=23+2i.$$

в) При делении двух комплексных чисел удобно числитель и знаменатель дроби умножить на число, сопряженное знаменателю, и выполнить указанные действия. Тогда

$$\frac{4+5i}{2-3i}=\frac{(4+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{8+12i+10i+15i^2}{4-9i^2}=\frac{-7+12i}{13}=-\frac{7}{13}+\frac{12}{13}i.$$

Выполнить указанные действия:

2. $(4-6i)+(2+2i)$. **3.** $(3-5i)(3+5i)$.

4. $(2-4i)(3+7i)$. **5.** $(6+11i)(7+3i)$.

6. $\dfrac{2+4i}{5-3i}$. **7.** $\dfrac{3-i}{4+5i}$. **8.** $\dfrac{3}{4+7i}$.

9. Решить уравнение $2x^2+3x+4=0$.

Решение. $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-32}}{4}=-\dfrac{3}{4}\pm\dfrac{\sqrt{23}}{4}i$.

Решить уравнения:

10. $x^2-4x+20=0$. **11.** $2x^2+3x+16=0$.

Выполнить указанные действия:

12. $(4-6i)+(2+2i)$. **13.** $(3-5i)(3+5i)$.

14. $(2-4i)(3+7i)$. **15.** $(6+11i)(7+3i)$.

16. $\dfrac{2+4i}{5-3i}$. **17.** $\dfrac{3-i}{4+5i}$. **18.** $\dfrac{3}{4+7i}$.

19. Упростить выражение $\dfrac{2i^{18}-5i^{32}+3i^{23}-4i^{33}}{3i^{10}-2i^{23}+i^{16}}$.

Решение. $\dfrac{2i^{18}-5i^{32}+3i^{23}-4i^{33}}{3i^{10}-2i^{23}+i^{16}}=$

$$=\frac{2\left(i^2\right)^9-5\left(i^2\right)^{16}+3\left(i^2\right)^{11}\cdot i-4\left(i^2\right)^{16}\cdot i}{3\left(i^2\right)^5-2\left(i^2\right)^{11}\cdot i+\left(i^2\right)^8}=$$

$$=\frac{2(-1)^9-5(-1)^{16}+3(-1)^{11}\cdot i-4(-1)^{16}\cdot i}{3(-1)^5-2(-1)^{11}\cdot i+(-1)^8}=$$

$$= \frac{-2-5-3i-4i}{-3+2i+1} = \frac{-7-7i}{-2+2i} = \frac{-7(1+i)}{-2(1-i)} = \frac{7(1+i)^2}{2(1-i)(1+i)} = \frac{7(1+2i-1)}{2(1+1)} = \frac{7}{2}i\,.$$

20. Упростить выражение $\dfrac{2i^{18}-5i^{32}+3i^{23}-4i^{33}}{3i^{10}-2i^{23}+i^{16}}$.

21. Записать число $z=-1+i$ в тригонометрической форме.

Решение. Изобразим данное комплексное число на плоскости xOy (рис. 2).

Очевидно, $r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$, $arg\,z=\dfrac{3\pi}{4}$, тогда

$-1+i=\sqrt{2}\left(cos\dfrac{3\pi}{4}+i\,sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

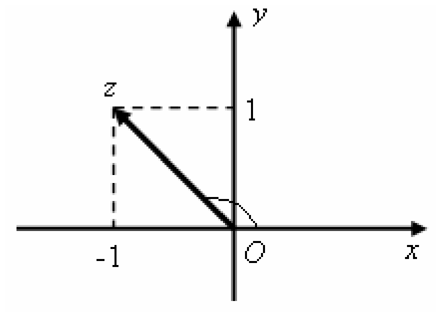


Рис. 2

22. Записать число $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ в тригонометрической форме.

Решение. Находим модуль r данного числа:

$$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1\,.$$

Для аргумента φ имеем: $sin\,\varphi=\dfrac{y}{r}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\,\varphi=\dfrac{x}{r}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Отсюда $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. Тогда $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i = cos\dfrac{\pi}{4}+i\,sin\dfrac{\pi}{4}$.

В задачах **23 – 26** записать в тригонометрической форме следующие комплексные числа.

23. 4. **24.** $-i$. **25.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$. **26.** $1-i$.

27. Вычислить $(-1+i)^4$.

Решение. Запишем комплексное число $-1+i$ в тригонометрической форме (см. задачу **21**) и применим формулу (1. 6).

$$(-1+i)^4=\left[\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\left(cos\frac{3\pi\cdot 4}{4}+i\,sin\frac{3\pi\cdot 4}{4}\right)=.$$
$$=4(-1+i\cdot 0)=-4.$$

28. Вычислить $(1+i)^{10}$.

29. Решить уравнение $z^3-i=0$.

Решение. Из данного уравнения имеем $z^3=i$ или

$z^3=cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}$. Отсюда по формуле (1. 7) имеем:

$$z=cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\text{ , где } к=0,\ 1.\ 2.$$

При $к=0$ получаем $z_1=cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

При $к=1$ получаем $z_2=cos\frac{5\pi}{6}+i\,sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

При $к=2$ получаем $z_3=cos\frac{9\pi}{6}+i\,sin\frac{9\pi}{6}=-i$.

Ответ. $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $z_3=-i$.

30. Вычислить $\sqrt[4]{1}$.

31. Вычислить $\sqrt[3]{-1+i}$.

32. Вычислить $\sqrt[3]{i}$.

33. Число $-i$ записать в показательной форме.

Решение. $-i=cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\,sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

34. Число $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^3$ записать в показательной форме.

Решение. Модуль r числа $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ равен 2, а его аргумент $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Запишем это число в показательной форме и применим формулу (1. 11):

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^3=\left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3=8e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

ГЛАВА 2. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2. 1. Предел функции

Основные понятия и формулы

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для сколь угодно малого положительного числа ε существует натуральное число N такое, что при всех $n > N$ выполнятся неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Символически это записывают так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Эту последовательность называют *сходящейся* к числу a. В символах это можно записать так: $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки $x=a$ (кроме, быть может, самой точки a). Из области определения функции произвольно выберем последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ (1) значений аргумента x, сходящуюся к числу a. Составим соответствующую последовательность $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ (2) значений функции $y = f(x)$.

Определение 1. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x стремящемся к a, если для любой последовательности (1) значений аргумента x, сходящейся к a, соответствующие последовательности (2) значений функции сходятся к числу A.

Символически это записывают так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Такую форму определения предела функции называют определением на *языке последовательностей.*

Этому определению предела функции равносильно следующее определение.

Определение 2. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x стремящемся к a, если для сколь угодно малого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это определение предела называется определением на языке «*эпсилон-дельта*».

Определение 3. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x стремящемся к бесконечности, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε найдется положительное число N такое, что для всех $x > N$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это символически записывают так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Определение 4. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε найдется отрицательное число M такое, что для всех $x < M$ справедливо неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Тогда пишут: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

Справедливы следующие *теоремы о пределах функций.*

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to a$ (или $x \to \pm\infty$) имеют конечные пределы, то:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm\varphi(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to a}[C\cdot f(x)] = C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Здесь C – постоянная величина.
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) \neq 0$.
5. Если функции $u(x)$, $z(x)$, $v(x)$ связаны соотношением
   $u(x) \le z(x) \le v(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a} z(x) = A$.
6. Если предельное значение аргумента $x = a$ принадлежит области определения элементарной функции $y = f(x)$, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right) = f(a).$$

Доказано, что предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге равен единице, то есть

$$\boldsymbol{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.} \qquad (2.1)$$

Формула (1) называется *формулой первого замечательного предела.* Из нее вытекает следующее следствие:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin k\alpha}{k\alpha} = 1, \qquad (2.2)$$

где $к$ – отличное от нуля действительное число.

Формулы (2. 1) и (2. 2) позволяют при вычислении отдельных пределов раскрывать неопределенность вида $\frac{0}{0}$ и сводящиеся к ней.

Доказано, что переменная величина $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \pm\infty$ имеет конечный предел, равный иррациональному числу 2,718281…, обозначаемому буквой $\boldsymbol{e}$, то есть

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (2.3)$$

Формулу (3.3) называют *формулой второго замечательного предела.*

Если в этой формуле положить $\frac{1}{x}=\alpha$, то она примет вид

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \qquad (2.4)$$

Применение формул (2. 3) и (2. 4) позволяет устранять неопределенность вида 1^{∞}.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to a$ ($x\to\pm\infty$), если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to a$ ($x\to\pm\infty$), если ее значения превышают сколь угодно большое число N. Это символически записывают так: $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$.

Бесконечно малые величины обладают следующими *свойствами*:

1. Сумма конечного числа бесконечно малых величин бесконечно мала.

2. Произведение бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

3. Частное от деления бесконечно малой величины на величину, имеющую отличный от нуля предел, есть величина бесконечно малая.

4. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина при $x\to a$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть величина бесконечно большая.

5. Если $\beta(x)$ – бесконечно большая величина при $x\to a$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ есть величина бесконечно малая.

Свойства 4 и 5 символически можно записать так: $\frac{1}{\infty}=0$, $\frac{1}{0}=\infty$.

35. Написать первые пять членов последовательности, общий член которой $x_n = \dfrac{2n}{n+3}$.

Решение. Придадим аргументу n значения 1, 2, 3, 4, 5, получаем $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{4}{5}$, $x_3 = 1$, $x_4 = \dfrac{8}{7}$, $x_5 = \dfrac{5}{4}$.

36. По заданной общей формуле общего члена написать соответствующие последовательности.

а) $x_n = \dfrac{n-1}{n^2+3}$; *б*) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n+4}$.

37. Написать формулу общего члена последовательности

$\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{3}{10}$; $\dfrac{4}{17}$; $\dfrac{5}{26}$, …

Решение. Пусть закон соответствия между множеством натуральных чисел n и членами данной последовательности сохраняется для всех ее последующих членов. Числитель каждого члена последовательности совпадает с его номером, а знаменатель равен квадрату этого номера плюс единица. Тогда формула общего члена x_n этой последовательности имеет вид $x_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

38. Для указанных последовательностей написать формулу общего члена.

а) $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{2}{7}$; $\dfrac{3}{10}$; $\dfrac{4}{13}$; $\dfrac{5}{16}$, …

б) $\dfrac{1}{1\cdot 3}$; $\dfrac{1}{2\cdot 5}$; $\dfrac{1}{3\cdot 7}$; $\dfrac{1}{4\cdot 9}$; …

в) $\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{4}{9}$; $\dfrac{9}{27}$; $-\dfrac{16}{81}$; $\dfrac{25}{243}$, …

39. Доказать, что предел последовательности $\{x_n\} = \dfrac{2n}{n+1}$ равен 2.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное малое число. Тогда справедливо неравенство

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon, \quad \frac{2}{n+1} < \varepsilon, \quad n+1 > \frac{2}{\varepsilon}, \quad n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}001$. Тогда $n > \frac{2}{0{,}001} - 1$, $n > 2000 - 1$, $n > 1999$. Для выбранного $\varepsilon = 0{,}001$ число $N = 1999$. Следовательно, при $n > 1999$ члены данной последовательности будут отличаться от своего предела $a = 2$ на величину, меньшую 0,001, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$.

40. Доказать, что последовательность $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{12}{7}$; $\frac{16}{9}$; $\frac{20}{11}$, … имеет предел, равный 2.

В задачах **41 – 86** вычислить указанные пределы.

41. $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2 - 5x + 4\right)$.

Решение. По свойству 6 имеем: $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2 - 5x + 4\right) = 3^2 - 5\cdot 3 + 4 = -2$.

42. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3 - 2\sin x}{\cos^2 x}$.

Решение. Как и в задаче **41**, имеем: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3 - 2\sin x}{\cos^2 x} = \frac{3 - 2\sin 0}{\cos^2 0} = 3$.

43. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5 - x}{x^2 - 1}$.

Решение. При $x \to 1$ числитель дроби стремится к 4, знаменатель есть бесконечно малая величина – дробь является бесконечно большой величиной, то есть данный предел равен ∞.

44. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3}$.

Решение. Предельное значение аргумента принадлежит области определения функции, поэтому $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3} = \frac{0}{7} = 0$.

45. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x^2 - 3}$.

Решение. Знаменатель дроби есть величина бесконечно большая при $x \to \infty$, числитель – функция ограниченная, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x^2 - 3} = 0$.

46. $\lim\limits_{x\to 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$.

Решение. Разложим числитель дроби на множители, применив формулу разности кубов:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-2^3}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4\right]}{\sqrt[3]{x}-2}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4\right]=12.$$

47. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на x и преобразуем ее:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3}}}{\dfrac{x+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{0}{1+0}=0,$$ так как дроби $\dfrac{1}{x}$

и $\dfrac{1}{x^3}$ при $x\to\infty$ бесконечно малы.

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

Решение. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на $\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)$ и преобразуем полученную дробь:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6-x^2}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-5x+6}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}+x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\dfrac{6}{x}}{\sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2}}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\dfrac{6}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}}+1}=\frac{-5+0}{1+1}=-2{,}5.$$

49. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+x-15}$.

Решение. При $x=-3$ числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, обращаются в нуль, то есть имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Для ее устранения разложим числитель и знаменатель дроби на произведение линейных множителей и сократим дробь:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+x-15}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(2x-5)}=\lim_{x\to -3}\frac{x-1}{2x-5}=\frac{4}{11}.$$

50. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+6}{3x^3+12x-1}$.

Решение. При стремлении x к бесконечности получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для устранения подобной неопределенности дробной рациональной функции следует числитель и знаменатель дроби разделить на x^n, где n – наивысшая степень многочленов числителя и знаменателя дроби.

Деля числитель и знаменатель данной дроби на x^3 и применяя теоремы о пределах и свойства бесконечно малых функций, имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+6}{3x^3+12x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}}{3+\frac{12}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{0-0+0}{3+0-0}=0.$$

51. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$.

Решение. При $x=-3$ получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель дроби на выражения, им сопряженные, то есть на произведение $\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)$.

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{\left(x^2+7-7+3x\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(x+3-x^2+9\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{x(x+3)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{(x+3)(4-x)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{(4-x)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} = 0 .$$

52. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$.

53. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$.

54. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-6x+9}{x^2-2x-3}$.

55. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

56. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x+3x^2}{4x^2+6x-5}$.

57. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3+2x^2-1}{5x^2-3x+2}$.

58. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

59. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

60. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$.

61. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

62. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

Решение. Для устранения имеющейся здесь неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ умножим числитель и знаменатель дроби на $\left(\sqrt{x+1}+1\right)$ и преобразуем дробь:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right) = 2 .$$

63. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

Решение. Для устранения имеющейся здесь неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ умножим числитель и знаменатель дроби на $\left(2+\sqrt{x}\right)\cdot\left(3+\sqrt{2x+1}\right)$ и преобразуем ее:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} = \lim_{x\to 4}\frac{(2-\sqrt{x})\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{(3-\sqrt{2x+1})\left(3+\sqrt{2x+1}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\left[2^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\right]\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left[3^2-\left(\sqrt{2x+1}\right)^2\right]\left(2+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{(9-2x-1)\left(2+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{2(4-x)\left(2+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 4}\frac{\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{2\left(2+\sqrt{x}\right)} = \frac{3}{4}.$$

64. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}$.

Решение. Для устранения неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\left(\sqrt{4x-3}+1\right)\left[\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2\right]$ и применим формулы разностей квадратов и кубов:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1} =$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2})\left[\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2\right]\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{(\sqrt{4x-3}-1)\left(\sqrt{4x-3}+1\right)\cdot\left[\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left[\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^3\right]\cdot\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{\left[\left(\sqrt{4x-3}\right)^2-1^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(2x-1-3x+2)\cdot\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{(4x-3-1)\cdot\left[\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)\cdot\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{4(x-1)\cdot\left[\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{4\left[\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2\right]} = -\frac{1}{6}.$$

65. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$.

Решение. Для устранения имеющейся неопределенности $\infty-\infty$ умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на $\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)$ и преобразуем получившуюся дробь:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)}{\sqrt{x^2+4x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x} = 4\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+4x}+x} = 4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x}+1} =$$

$$= 4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}}+1} = 4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

66. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на 2 и применим формулу (2.2): $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 6x}{6x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x} = 2\cdot 1 = 2.$

67. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 5x}{2x}$.

Решение. Преобразуем дробь, стоящую под знаком предела, применим свойства пределов и формулу (2.2):

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg 5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x\cos 5x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}\right) = \frac{5}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = 2{,}5\,.$$

68. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}$.

Решение. Преобразуем числитель дроби по формуле синуса двойного угла:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}(2\cos 2x) = 2.$$

69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. Преобразуем дробь и применим формулу (2.2):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = 0{,}5.$$

70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{x}$.

Обозначим $\arcsin 3x = t$. Тогда $x = \dfrac{\sin t}{3}$ и $t\to 0$ при $x\to 0$. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\sin t}{3}} = 3\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 3\cdot\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = 3.$$

71. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$.

Решение. Как и в предыдущих задачах, имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Преобразуем дробь и применим формулы (2.1) и (2.2):

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cdot\cos x} = = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 0{,}5.$$

72. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$. **73.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$. **74.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 6x}{2x}$.

75. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x}$. **76.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\,tg 3x}$. **77.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

78. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5x+4}$.

Решение. В этой задаче имеем дело с неопределенностью вида 1^∞, для раскрытия которой применим формулу (2.3).

Преобразуем выражение, используя свойства степеней и пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x+4} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^5 \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4 = e^5\cdot 1 = e^5.$$

79. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2+5}{x-2}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x-2}\right)^{x}$.

Для удобства применения формулы второго замечательного предела сделаем замену: $\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{1}{t}$, отсюда $x=5t+2$ и $t\to\infty$ при $x\to\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{x} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5t+2} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^5 \cdot \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^2 =$$

e^5.

80. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x-1}$.

Решение. Выполним преобразования, аналогичные приведенным в предыдущей задаче:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)^{2x-2+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot 4+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot 4} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right) = e^4\cdot 1 = e^4.$$

81. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{3/\cos x}$.

Решение. Сделаем замену $\cos x = \alpha$. Тогда $\alpha \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$.
Применим формулу (2.4). Имеем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{3/\cos x} = \lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^3 = e^3.$$

82. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3tgx)^{ctgx}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3tgx)^{ctgx} = \lim\limits_{x\to 0}(1+3tgx)^{3/3tgx} =$

$= \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{3/\alpha} = e^3$.

83. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x+1}$.

84. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

85. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$.

86. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x+1}$.

2. 2. Сравнение бесконечно малых величин

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ - две бесконечно малые при $x \to a$ величины. Имеют место следующие определения.

1. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, то α называется бесконечно малой высшего порядка малости в сравнении с β.

2. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$, то α называется бесконечно малой низшего порядка малости в сравнении с β.

3. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = C$, где $C \neq 0$, то α и β называют бесконечно малыми одного порядка малости.

4. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то α и β называют эквивалентными бесконечно малыми и обозначают $\alpha\sim\beta$.

5. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta^{k}}=C$, где $C\neq 0$, то α называется бесконечно малой k – го порядка малости в сравнении с β.

87. Доказать, что при $x\to 0$ бесконечно малые $\sin kx$ и $tg kx$ эквивалентны.

Решение. Вычислим предел отношения этих бесконечно малых величин:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{tgkx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx\cdot\cos kx}{\sin kx}=\lim_{x\to 0}\cos kx=1.$$

Так предел равен 1, то данные бесконечно малые величины по определению эквивалентны.

88. Доказать, что при $x\to 0$ бесконечно малые величины $\dfrac{x}{2}$ и $\sqrt{x+1}-1$ эквивалентны.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\frac{x}{2}}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=2\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

Значит, данные бесконечно малые эквивалентны.

89. Сравнить бесконечно малые $\alpha=1-\cos x$ и $\beta=x$ при $x\to 0$.

Решение. Найдем предел отношения $\dfrac{\alpha}{\beta}$ при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$$

Так как предел отношения равен нулю, то α есть бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с β.

Для определения порядка малости α относительно β найдем предел отношения α к β^2 :

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha}{\beta^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, α является бесконечной малой второго порядка малости относительно β.

90. Доказать, что $\alpha = tgx - \sin x$ при $x\to0$ есть бесконечно малая третьего порядка малости относительно $\beta = x$.

91. Сравнить бесконечно малые $\alpha=\cos 3x-\cos x$ и $\beta = x$ при $x\to0$ и определить порядок малости α относительно β.

92. Сравнить бесконечно малые $\alpha=\sqrt{1+x^3}$ и $\beta=x$ при $x\to0$ и определить порядок малости α относительно β.

93. Сравнить бесконечно малые $\alpha=\ln\left(1+x^2+x^3\right)$ и $\beta=x$ при $x\to0$ и определить порядок малости α относительно β.

94. Доказать, что при $x\to0$ бесконечно малые величины $\ln(1+x)$ и x эквивалентны.

Решение. Вычислим

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=\ln e=1.$$

Следовательно, исходя из приведенного выше пункта 4 рассматриваемые величины эквивалентны.

95. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg4x}{\ln(1+x)}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби есть бесконечно малые при $x\to0$ величины. Эквивалентные бесконечно малые величины обладают следующим свойством: при нахождении предела их отношения можно каждую из них (или только одну) заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

$tg4x\sim4x$ (покажите это самостоятельно), $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to0$ (см. задачу 94), поэтому

$$\lim_{x\to0}\frac{tg4x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{4x}{x}=4.$$

96. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,arctg6x}{(\arcsin3x)^2}$.

Решение. Так как $arctgmx\sim mx$, $\arcsin kx\sim kx$ при $x\to0$ (докажите это самостоятельно), то

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \, arctg 6x}{(arcsin 3x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 6x}{(3x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{6x^2}{9x^2} = \frac{2}{3}.$$

В задачах **97 – 100** вычислить пределы, применяя эквивалентность бесконечно малых величин.

97. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{sin(x+3)}{2x^2 + 5x - 3}$. **98.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg 8x}{sin 3x}$.

99. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + sin^2 2x}{arctg 3x}$. **100.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(1+mx)}{nx}$.

2. 3. Непрерывность функции

Основные понятия и формулы

Если ищется предел функции $y = f(x)$ при стремлении аргумента x к своему предельному значению a, остающемуся меньше (больше) a, то этот предел называется *левосторонним* (*правосторонним*) пределом функции в точке a и обозначается символами

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) \text{ или } \lim_{x \to a-0} f(x) \quad \Big(\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) \text{ или } \lim_{\substack{x \to a \\ x \to a+0}} f(x) \Big).$$

Предел функции $y = f(x)$ при $x \to a$ существует тогда и только тогда, когда равны между собой ее левосторонний и правосторонний пределы в точке a, то есть $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$. Если это равенство не выполняется, то функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ не имеет предела.

Левосторонний и правосторонний пределы функции называют ее *односторонними пределами.*

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке, содержащем точку a. Придадим аргументу $x = a$ приращение Δx, которое вызовет приращение функции

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* при $x=a$ (в точке a), если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Определению 1 непрерывности функции в точке эквивалентно следующее определение.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ *непрерывна* в точке a, если выполнены следующие условия:

1) функция $y=f(x)$ должна быть определена как в самой точке a, так и некоторой ее окрестности;

2) функция $y=f(x)$ имеет в точке a равные между собой односторонние пределы, равные $f(a)$, то есть

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a).$$

Если для функции $y=f(x)$ в точке a не выполняется хотя бы одно из двух приведенных выше условий непрерывности, то эту точку называют *точкой разрыва функции*.

Точка a называется *точкой разрыва первого рода*, если односторонние пределы функции в этой точке существуют, но не равны между собой.

В этом случае выражение $\left|\lim\limits_{x\to a-0} f(x)-\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\right|$ называется *скачком* функции $y=f(x)$ в точке a.

Если в точке a имеем $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\neq f(a)$, то ее называют *точкой устранимого разрыва* и доопределяют функцию для ее непрерывности в точке a так, чтобы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$.

Точка a называется *точкой разрыва второго рода* функции $y=f(x)$, если в этой точке не существует хотя бы один из односторонних пределов или он равен бесконечности.

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[\alpha;\beta]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

Справедлива следующая теорема: *Всякая элементарная функция непрерывна на своей области определения.*

101. Найти односторонние пределы функции $y=\dfrac{2x}{x-5}$ при $x\to 5$.

Решение.

$\lim\limits_{x\to 5-0}\dfrac{2x}{x-5}=-\infty$, так как при $x\to 5-0$ знаменатель дроби стремится к нулю, оставаясь отрицательным, а числитель стремится к 10.

$\lim\limits_{x\to 5+0}\dfrac{2x}{x-5}=\infty$, так как знаменатель дроби есть бесконечно малая (положительная) величина.

102. Найти односторонние пределы функции $y = 3^{\frac{1}{x-2}}$ при $x \to 2$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}} = 0$, так как при $x \to 2-0$ показатель степени $\frac{1}{x-2}$ стремится к $-\infty$, а сама степень стремится к нулю.

$\lim\limits_{x \to 2+0} 3^{\frac{1}{x-2}} = \infty$, поскольку в этом случае показатель степени есть бесконечно большая величина.

В задачах **103 – 105** найти односторонние пределы функций.

103. $y = \frac{x+2}{x+3}$ при $x \to -3$.

104. $y = 5^{\frac{1}{x-4}}$ при $x \to 4$.

105. $y = \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x^2-25}$ при $x \to 5$.

106. Пользуясь определением непрерывности, показать, что функция $y = x^2 + 2x - 3$ непрерывна на всей числовой оси.

Решение. Придадим аргументу x приращение Δx, которое вызовет приращение Δy функции, равное

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \left[(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - 3\right] - \left(x^2 + 2x - 3 =\right)$$
$$= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - 3 - x^2 - 2x + 3 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x =$$
$$= \Delta x \cdot (2x + \Delta x + 2).$$

Вычислим предел Δy при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\Delta x \cdot (2x + \Delta x + 2)\right] = 0.$$

Следовательно, по определению данная функция непрерывна при любом значении x.

107. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{x^3+1}{x+1}$.

Решение. При $x = -1$ данная функция не определена, в точке функция терпит разрыв. Найдем ее односторонние пределы в точке $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1-0}\left(x^2-x+1\right)=3;$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1+0}\left(x^2-x+1\right)=3.$$

Односторонние пределы существуют, значит, $x=-1$ есть точка разрыва первого рода.

Итак, данная функция непрерывна на множестве $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.

График данной функции представлен на рис. 3.

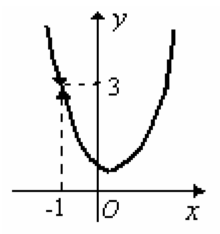


Рис. 3

108. Исследовать на непрерывность функцию $y=2^{\frac{1}{x-3}}$.

Решение. Данная функция определена при всех значениях *x*, кроме $x=3$, поэтому $x=3$ есть точка разрыва функции. Так как данная функция является элементарной, то она непрерывна для всех значений *x*, кроме $x=3$, то есть непрерывна на интервале $(-\infty;3)\cup(3;\infty)$.

Правосторонний предел $\lim\limits_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}}=\infty$, поэтому $x=3$ есть точка разрыва второго рода.

График исследуемой функции представлен на рис. 4.

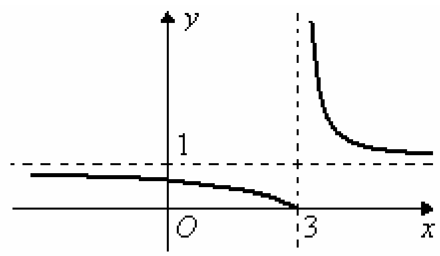


Рис. 4

109. Исследовать на непрерывность функцию $y=\begin{cases} x^2, \textit{если } x\le 1, \\ 4-x, \quad \textit{если } x>1\end{cases}$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;1)$ и $(1;\infty)$. Так как при $x=1$ меняется аналитическое выражение функции, то только в этой точке функция может иметь разрыв. Найдем односторонние пределы функции в точке $x=1$.

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1\ ;\quad \lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} (4-x) = 3\,.$$

Односторонние пределы функции в точке $x=1$ существуют и не равны между собой, поэтому в этой точке функция имеет разрыва первого рода.

График исследуемой функции представлен на рис. 5.

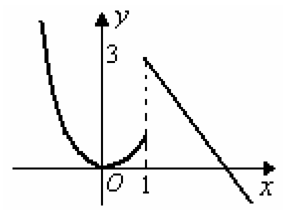


Рис. 5

110. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{2x}{x+3}$.

111. Укажите точки разрыва функции $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & при \quad x\neq 0\,,\\ 3 & при \quad x=0\end{cases}$

112. Исследовать на непрерывность функцию

$$y=\begin{cases}x^2-1 & при \quad x<2\,,\\ -x^2 & при \quad x\geq 2\end{cases}.$$

113. Исследовать на непрерывность функцию

$$y=\begin{cases}1-x^2 & при\ x<2\\ x-1 & при -2\leq x\leq 2\,.\\ \dfrac{2}{x} & при\ x>2\end{cases}$$

ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3. 1. Производная функции

Основные понятия и формулы

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю.

Для обозначения производной функции $y = f(x)$ используют следующие символы: y' или $f'(x)$ (по Лагранжу), $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{d}{dx}f(x)$ (по Лейбницу). С учетом принятых обозначений имеем:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Процесс нахождения производной функции называется ее *дифференцированием.*

Если функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке интервала (a; b), то эту функцию называют *дифференцируемой* на этом интервале.

Пусть функциональная зависимость $s = s(t)$ есть закон прямолинейного движения точки, где $s(t)$ – путь, пройденный ею за время t. Тогда производная от пути s по времени движения t есть скорость движения $v(t)$, то есть $v(t) = s'(t)$. В этом заключается *физический(механический) смысл производной.*

С *геометрической* точки зрения значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_o равно тангенсу угла α наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_o(x_o; f(x_o))$, то есть $y'(x_o) = tg\alpha$.

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – функции, дифференцируемые в точке x_o; $v(x_o) \neq 0$; C – постоянная величина.

Справедливы следующие теоремы, называемые *правилами дифференцирования.*

Теорема 1. *Производная постоянной равна нулю, то есть*

$$\boldsymbol{C' = 0.} \qquad \text{(I)}$$

Теорема 2. *Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций равна сумме производных слагаемых функций, то есть*

$$\boldsymbol{(u + v)' = u' + v'} . \qquad \text{(II)}$$

Теорема 3. *Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведения производной первого множителя на* *второй и первого множителя на производную второго, то есть*

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. \qquad \text{(III)}$$

Теорема 4. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной, то есть*

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'. \qquad \text{(IV)}$$

Теорема 5. *Производная частного двух дифференцируемых функций равна дроби, числитель которой есть разность между произведением производной числителя на знаменатель и произведением числителя на производную знаменателя, а знаменатель дроби есть квадрат знаменателя данной дроби, то есть*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \qquad \text{(V)}$$

Теорема 6. *Производная сложной функции* $y = f(u)$, *где* $u = \varphi(x)$ *по независимому аргументу x, равна произведению производной функции y по промежуточному аргументу и на производную функции и по независимой переменной x, то есть*

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \qquad \text{(VI)}$$

Исходя из определения производной и указанных выше теорем можно вывести следующие формулы *производных основных элементарных функций* (*табличные формулы*):

(1). $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'.$

(2). $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$

(3). $(e^u)' = e^u \cdot u'.$

(4). $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}.$

(5). $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}.$

(6). $(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$

(7). $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$

Если $u = x$, то $u' = 1$.

(8). $(tg u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}.$

(9). $(ctg u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}.$

(10). $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$

(11). $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$

(12). $(arctg u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}.$

(13). $(arcctg u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}.$

В задачах **114 – 117** найти производные функций, пользуясь определением производной.

114. $y = x^3$.

Решение. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x - x)\left[(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)x + x^2\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[3x^2 + 3x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2\right] =$$

$= 3x^2$.

115. $y = \dfrac{1}{x}$.

Решение. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

116. $y = \dfrac{1}{3x+2}$.

Решение.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{3(x+\Delta x)+2} - \dfrac{1}{3x+2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{3x+2-3x-3\Delta x-2}{(3x+2)\left[3(x+\Delta x)+2\right]}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3\Delta x}{\Delta x(3x+2)\left[3(x+\Delta x)+2\right]} = -\frac{3}{(3x+2)^2}.$$

117. $y = sinx$.

Решение. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{sin(x+\Delta x) - sin\,x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\,sin\dfrac{\Delta x}{2}cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot cos\,x = cos\,x.$$

В задачах **118 – 125** найти производные указанных функций.

118. $y = x^3 - \sqrt{x} + e^x$.

Решение. Применяя правило II и табличные формулы (2), (3), имеем:

$$y' = \left(x^3\right)' - \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + \left(e^x\right)' = 3x^2 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + e^x = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x.$$

119. $y=x^2 cos x.$

Решение. Используем правило III нахождения производной произведения и табличные формулы (1) и (7):

$$y' = \left(x^2\right)' \cdot cos\, x + x^2 \cdot (cos\, x)' = 2x\, cos\, x - x^2\, sin\, x.$$

120. $y = x^3\, ln\, x - \dfrac{x^3}{3}.$

Решение. $y' = \left(x^3\, ln\, x\right)' - \left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = 3x^2\, ln\, x + x^3 \cdot \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3} \cdot 3x^2 = 3x^2\, ln\, x.$

121. $y = sin^2 x.$

Решение. Применяем правило VI дифференцирования сложной функции: $y' = 2\, sin\, x \cdot (sin\, x)' = 2\, sin\, x \cdot cos\, x = sin\, 2x.$

122. $y = \left(2x^4 - 5x + 1\right)^3$

Решение. По правилу VI получаем:

$$y' = 3\left(2x^4 - 5x + 1\right)^2 \cdot \left(2x^4 - 5x + 1\right)' = 3\left(2x^4 - 5x + 1\right)^2 \left(8x^3 - 5\right).$$

123. $y = ln\, sin\left(x^3 + 2\right).$

Решение. Применяем правило VI и табличные формулы:

$$y' = \frac{1}{sin\left(x^3+2\right)} \cdot \left[sin\left(x^3+2\right)\right]' = \frac{1}{sin\left(x^3+2\right)} \cdot cos\left(x^3+2\right) \cdot \left(x^3+2\right)' =$$

$$= 3x^2 ctg\left(x^3+2\right).$$

124. $y = \dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2}.$

Решение. Дифференцируем функцию как частное:

$$y' = \frac{\left(\sqrt{4x+1}\right)' \cdot x^2 - \sqrt{4x+1} \cdot \left(x^2\right)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (4x+1)^{-1/2} \cdot 4x^2 - \sqrt{4x+1} \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{2x\left(\frac{x}{\sqrt{4x+1}} - \sqrt{4x+1}\right)}{x^4} = \frac{2(x - 4x - 1)}{x^3\sqrt{4x+1}} = -\frac{2(3x+1)}{x^3\sqrt{4x+1}}.$$

125. $y=\frac{1}{3}ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$.

Решение. Для удобства дифференцирования преобразуем функцию, используя свойство логарифма частного:

$$y=\frac{1}{3}ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}\cdot\left[ln\left(x^2-2x+1\right)-ln\left(x^2+x+1\right)\right]$$

Тогда $y'=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2x-2}{x^2-2x+1}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2(x-1)}{(x-1)^2}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right]=$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2}{x-1}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right]=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2\left(x^2+x+1\right)-(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{3x+3}{x^3-1}\right]=\frac{x+1}{x^3-1}.$$

В задачах **126 – 131** найти производные указанных функций.

126. $y=ln\,sin\left(x^3+2\right)$. **127.** $y=ln\,sin\,5x$. **128.** $y=\left(2^{arctg\sqrt{x}}+1\right)^3$.

129. $y=arctge^{sin\,3x}$. **130.** $y=\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$.

131. $y=arctg\sqrt{x^2-1}-\frac{ln\,x}{\sqrt{x^2-1}}$.

132. Вычислить $f'(0)$, если $f(x)=e^{-x}cos\,3x$.

Решение. Дифференцируем функцию как произведение:

$$f'(x)=-e^{-x}cos\,3x+e^{-x}(-3sin\,3x)=-e^{-x}(cos\,3x+3sin\,3x).$$

Отсюда $f'(0)=-1\cdot(1+0)=-1$.

133. Вычислить $f'(0)$, если $f(x)=arccos\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Дифференцируем данную сложную функцию:

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$ Тогда $f'(0)=1$.

134. На параболе $y=x^2-x+4$ найти точку, в которой касательная к кривой наклонена к оси Ox под углом 45°.

Решение. Пусть x_o – абсцисса точки касания. Исходя из геометрического смысла производной имеем: $y'(x_o)=2x_o-1=tg45^\circ=1$, отсюда $x_o=1$ и $y_o=4$. Значит, точка $A(1;4)$ – искомая.

135. Составить уравнения касательной и нормали к параболе

$y = x^2 + 4x - 15$ в точке с абсциссой $x_o = 3$.

Решение.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_o(x_o; y_o)$ имеет вид $\boldsymbol{y = y_o + y'(x_o)\cdot(x - x_o)}$.

Нормаль (перпендикуляр к касательной, проходящий через точку касания) определяется уравнением $\boldsymbol{y = y_o - \dfrac{1}{y'(x_o)}\cdot(x - x_o)}$.

Ордината y_o точки касания равна 6. Находим производную $y' = 2x + 4$ и $y'(x_o) = y'(3) = 10$.

Уравнение касательной – $y = 6 + 10(x - 3)$ или $10x - y - 24 = 0$.

Уравнение нормали – $y = 6 - \dfrac{1}{10}(x - 3)$ или $x + 10y - 63 = 0$.

136. Найти углы, под которыми пересекаются параболы

$$y = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right) \text{ и } y = \frac{1}{4}\left(4 - x^2\right).$$

Решение. Углом между двумя кривыми $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ в точке их пересечения $M_o(x_o; y_o)$ называется угол между касательными к этим кривым в этой точке, вычисляемый по формуле

$$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{\varphi'(x_o) - f'(x_o)}{1 + f'(x_o)\varphi'(x_0)}}.$$

Решив систему уравнений данных парабол, находим точки их пересечения $A\left(\sqrt{2}; 0{,}5\right)$ и $B\left(-\sqrt{2}; 0{,}5\right)$. Дифференцируем уравнения парабол: $y' = x$; $y' = -\dfrac{x}{2}$. Находим угловые коэффициенты касательных к параболам в точке A (то есть значения найденных производных при $x = \sqrt{2}$): $k_1 = \sqrt{2}$; $k_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Так как $k_1 \cdot k_2 = -1$, то касательные взаимно перпендикулярны. Значит, данные кривые в точке A пересекаются под прямым углом.

В силу четности данных функций (их графики симметричны относительно оси ординат) угол пересечения этих парабол в точке B – тоже прямой.

В задачах **137 – 149** найти производные данных функций.

137. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x\left(x^3 + 1\right)}{cos^2 x}}$.

Решение. Для нахождения производной применим способ логарифмического дифференцирования: данную функцию логарифмируем, а затем дифференцируем обе части полученного равенства.

$$ln\,y = \frac{1}{3}\left[ln\,x + ln\left(x^3+1\right) - 2\,ln\,cos\,x\right]; \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3+1} - 2\cdot\frac{(-sin\,x)}{cos\,x}\right];$$

$$y' = \frac{1}{3}y\left[\frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3+1} - 2\cdot\frac{(-sin\,x)}{cos\,x}\right] = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x\left(x^3+1\right)}{cos^2 x}}\left[\frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3+1} + 2tgx\right].$$

138. $y = (x+1)^{sin\,x}$.

Решение. Применяем метод логарифмического дифференцирования.

$$ln\,y = sin\,x\cdot ln(x+1)\ ; \quad \frac{y'}{y} = cos\,x\cdot ln(x+1) + \frac{sin\,x}{x+1}\ ;$$

$$y' = y\left[cos\,x\cdot ln(x+1) + \frac{sin\,x}{x+1}\right] = (x+1)^{sin\,x}\left[cos\,x\cdot ln(x+1) + \frac{sin\,x}{x+1}\right].$$

139. $y = x^x$.

Решение. $ln\,y = x\,ln\,x\ ;\ \dfrac{y'}{y} = ln\,x + 1\ ;\ y' = x^x(ln\,x+1)$.

140. $y = (tgx)^{ctgx}$.

Решение. $ln\,y = ctgx\cdot ln\,tgx\ ;\ \dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{sin^2 x}\cdot ln\,tgx + ctgx\cdot\dfrac{1}{tgx}\cdot\dfrac{1}{cos^2 x}\ ;$

$$y' = y(1 - ln\,tgx)cosec^2 x = (tgx)^{ctgx}(1 - ln\,tgx)cosec^2 x.$$

141. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$.

Решение. Функциональная зависимость задана в неявном виде. Дифференцируем обе части уравнения по переменной x, считая y функцией от x, из полученного уравнения находим y'.

$$2x + 2yy' - 2 + 6y' = 0;\ \ y'\cdot(y+3) = 1 - x;\ \ y' = \frac{1-x}{y+3}.$$

142. $tgy - xy = 0$.

Решение. Дифференцируем неявно заданную функцию:

$$\frac{1}{cos^2 y}\cdot y' - y - xy' = 0\ ; \quad y'\left(\frac{1}{cos^2} - x\right) = y\ ; \quad y' = \frac{y\,cos^2 y}{1 - x\,cos^2 y}.$$

143. $cos(x+y) - y = 0$.

Решение.

$$-sin(x+y)\cdot(1+y') - y' = 0\ ; \quad -sin(x+y) - y'\,sin(x+y) - y' = 0;$$

$$y'[sin(x+y)+1]=-sin(x+y)\ ; \quad y'=-\frac{sin(x+y)}{sin(x+y)+1}.$$

144. $x^3+x^2y+y^2=0$.

Решение. $3x^2+2xy+x^2y'+2yy'=0$; $\left(x^2+2y\right)y'=-\left(3x^2+2xy\right)$;

$$y'=-\frac{3x^2+2xy}{x^2+2y}.$$

145. $y^3-tgy+cos\,x-x^3=0$. **146.** $y^2tgx-cos(x-y)=0$.

147. $x^3+x^2y+y^2=0$. **148.** $x^2y+arctg\frac{x}{y}=0$.

149. $e^{x+y}-ln\,sin\frac{y}{x}=0$.

В задачах **150 - 151** найти производные функций, заданных параметрически.

150. $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t^3 \end{cases}$.

Решение. $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t dt}{x'_t dt}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3t^2}{2}$.

151. $\begin{cases} x=e^{-t} \\ y=e^{2t} \end{cases}$.

Решение. $y'=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2e^{2t}}{-e^{-t}}-2e^{3t}$.

152. Вычислить $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $\begin{cases} x=a(t-sin\,t) \\ y=a(1-cos\,t) \end{cases}$.

Решение. Находим производную $y'=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\,sin\,t}{a(1-cos\,t)}=\frac{sin\,t}{1-cos\,t}=ctg\frac{t}{2}$

Тогда $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=ctg\frac{\pi}{4}=1$.

В задачах **153 – 156** найти производные функций, заданных параметрически.

153. $\begin{cases} x=cos^3 t \\ y=sin^3 t \end{cases}$. **154.** $\begin{cases} x=a\,cos^2 t \\ y=b\,sin^2 t \end{cases}$. **155.** $\begin{cases} x=e^t\,sin\,t \\ y=e^t\,cos\,t \end{cases}$.

156. $\begin{cases} x=tgt+ctgt \\ y=2\,ln\,ctgt \end{cases}$.

157. Найти значение $\frac{dy}{dx}$ при $t=1$, если $\begin{cases} x = t\,ln\,t \\ y = \frac{ln\,t}{t} \end{cases}$.

В задачах **158 – 160** найти производные второго порядка следующих функций.

158. $y = e^{x^2}$.

Решение. Дважды дифференцируем данную функцию.

$$y' = 2xe^{x^2}; \quad y'' = 2\left(e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}\right) = 2e^{x^2}\left(1+2x^2\right).$$

159. $y = tgx$.

Решение. $y' = \frac{1}{cos^2 x}$;

$$y'' = \left(\frac{1}{cos^2 x}\right)' = \left(cos^{-2} x\right)' = -2cos^{-3} x \cdot \left(-sin\,x\right) = \frac{2\,sin\,x}{cos^3 x}.$$

160. $y = sin^2 x$.

в) $y' = 2\,sin\,x \cdot cos\,x = sin\,2x$; $y'' = 2\,cos\,2x$.

В задачах **161 – 165** найти производные третьего порядка данных функций.

161. $y = cos^2 x$. **162.** $y = x\,ln\,x$. **163.** $y = xe^x$. **164.** $y = ln\,sin\,x$.

165. $y = \left(x^2 + a^2\right)arctg\,\frac{x}{a}$

166. Найти производную четвертого порядка функции $y = x^4\,lnx$.

Решение. Искомую производную y'''' можно найти, предварительно определив производные предшествующих порядков, то есть y', y'', y'''. В данном случае удобнее применить *формулу Лейбница*, позволяющую находить производную n-го порядка от произведения двух функций:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^{(n-3)}v''' + \cdots + uv^{(n)}$$

В нашем случае $u = x^4$, $v = lnx$. Находим производные до четвертого порядка функций u и v и подставляем их в формулу Лейбница.

$$u' = 4x^3; \quad u'' = 12x^2; \quad u''' = 24x; \quad u^{(4)} = 24;$$

$$v' = \frac{1}{x}; \quad v'' = -\frac{1}{x^2}; \quad v''' = \frac{2}{x^3}; \quad v^{(4)} = -\frac{6}{x^4}.$$

$$y^{(4)} = 24\,ln\,x + 4\cdot 24x\cdot\frac{1}{x} + 6\cdot 12x^2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 4\cdot 4x^3\cdot\frac{2}{x^3} + x^4\cdot\left(-\frac{6}{x^4}\right) =$$

$$= 24\,ln\,x + 50.$$

3. 2. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$. Так как переменная величина $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ отличается от своего предела на бесконечно малую величину, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Тогда $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, то есть приращение функции Δy состоит из двух слагаемых, первое из которых является главной частью этого приращения.

Определение. *Дифференциалом* dy функции $y = f(x)$ в точке x называется главная, линейная относительно Δx часть $y'\Delta x$ приращения Δy функции, то есть

$$\boldsymbol{dy = y' \cdot \Delta x}. \tag{3.1}$$

Так как $dx = \Delta x$, то

$$\boldsymbol{dy = y' \cdot dx}. \tag{3.2}$$

167. Найти значение дифференциала функции $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ при $x = 9$, $\Delta x = -0{,}01$.

Решение. Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал (приращение) аргумента, то есть

$$dy = y' \cdot \Delta x = 2 \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' \Delta x = -\frac{1}{x\sqrt{x}} \Delta x.$$

Отсюда искомое значение дифференциала равно $dy = -\dfrac{1}{27} \cdot (-0{,}01) = \dfrac{1}{2700}$.

168. На сколько увеличится объем шара, если его радиус 15см увеличится на 2 мм ?

Решение. При малых значениях приращения аргумента Δx приращение функции Δy незначительно отличается от ее дифференциала, то есть справедливо приближенное равенство $\Delta y \approx dy$.

Объем V шара радиуса R вычисляется по формуле $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. Тогда

$$\Delta V \approx dV = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' \Delta R = 4\pi R^2 \Delta R = 4\pi 15^2 0{,}2 \approx 565\ см^3.$$

169. Найти приближенное значение величины $\sqrt[3]{26{,}46}$.

Решение. При незначительной разнице между значениями аргумента x_1 и x_2 функции $y = f(x)$ справедливо следующее приближенное равенство: $\boldsymbol{f(x_2) \approx f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)}$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$. Пусть $x_1 = 27$, $x_2 = 26{,}46$. Находим производную $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, ее значение $y'(27) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \dfrac{1}{27}$ и применяем приведенную выше формулу:

$$\sqrt[3]{26{,}46} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27}(26{,}46 - 27) \approx 2{,}98.$$

Подобным образом, *дифференциал n-го порядка* равен

$$\boldsymbol{d^n y = y^{(n)}(dx)^n}.$$

170. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x^4 - 3x^2$.

Решение. Дифференциал *n-го порядка* функции $y = f(x)$ равен

$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n.$$

Находим производную второго порядка от данной функции:

$y' = 4x^3 - 6x$; $y'' = 12x^2 - 6$. Тогда $d^2y = y''(dx)^2 = (12x^2 - 6)(dx)^2$.

171. Вычислить значение дифференциала третьего порядка функции $y = x^5 + 7x^2$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}1$.

В задачах **172 – 176** найти дифференциалы указанных функций.

172. $y = \sin 5x - 5e^{-x^2}$.

173. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4}\right)$.

174. $y = \ln \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

175. $x^3 + y^2 + xy = 0$.

176. Вычислить значение дифференциала третьего порядка функции $y = \sqrt{1 + x^2}$ при $x = 1$ и $dx = 0{,}2$.

ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

4. 1. Правило Лопиталя

Справедлива следующая теорема, называемая *правилом Лопиталя*: *предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших дифференцируемых функций равен пределу отношения их производных, то есть*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} .$$

Правило Лопиталя позволяет при вычислении пределов раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ и сводящиеся к ним.

В задачах **177 – 184** вычислить указанные пределы, пользуясь правилом Лопиталя.

177. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$.

Решение. При подстановке предельного значения аргумента $x = 1$ имеем неопределенность $\frac{0}{0}$, поэтому применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 - 2x^2 - x + 2)'}{(x^3 - 7x + 6)'} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 4x - 1}{3x^2 - 7} = \frac{-2}{-4} = 0{,}5 .$$

178. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{ln(x^2 - 3)}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение. Раскрываем неопределенность вида $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{ln(x^2 - 3)}{x^2 - 3x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\left[ln\left(x^2 - 3\right)\right]'}{\left(x^2 - 3x + 2\right)'} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2x}{x^2 - 3}}{2x - 3} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{\left(x^2 - 3\right)\left(2x - 3\right)} = 4 .$$

179. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$.

Решение. Для устранения неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$ применяем правило Лопиталя и используем формулу первого замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(ctgx)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x = 0.$$

180. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$.

Решение. Для устранения неопределенности $\dfrac{0}{0}$ применяем правило Лопиталя и преобразуем дробь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(tgx-\sin x)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{(1-\cos x)\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{(1-\cos x)\cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos^2 x} = 3.$$

181. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-tgx}{\cos 2x}$.

Решение. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-tgx}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-tgx)'}{(\cos 2x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{-2\sin 2x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-1}{\sin 2x\cdot\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\cdot(-1) = 0{,}5.$$

. **182**. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$.

Решение. Сведем имеющуюся неопределенность $0\cdot\infty$ к неопределенности $\frac{0}{0}$ и применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{ctg\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)'}{(ctg\frac{\pi x}{2})'} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{1}{sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

183. $\lim_{x\to 1}(x-1)^{ln\,x}$.

Решение. Имеем неопределенность 0^0.

Обозначим $=y\lim_{x\to 1}(x-1)^{ln\,x}$. Прологарифмируем данную функцию и вычислим предел ее логарифма.

$ln\,y = ln\,x\cdot ln(x-1)$; $\lim_{x\to 1} ln\,y = \lim_{x\to 1}[ln\,x\cdot ln(x-1)] =$ /имеем неопределенность $0\cdot\infty$/ $= \lim_{x\to 1}\frac{ln(x-1)}{\frac{1}{ln\,x}} =$ / получили неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ и применяем правило Лопиталя / $= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x\,ln^2 x}} = -\lim_{x\to 1}\frac{x\,ln^2 x}{x-1} = -\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}\frac{ln^2 x}{x-1} =$

$= -\lim_{x\to 1}\frac{ln^2 x}{x-1} =$ / неопределенность $\frac{0}{0}$ / $= -\lim_{x\to 1}\frac{2\,ln\,x\cdot\frac{1}{x}}{1} = 0.$

Так как $\lim_{x\to 1} ln\,y = 0$, то $\lim_{x\to 1} y = \lim_{x\to 1}(x-1)^{ln\,x} = 1.$

184. $\lim_{x\to 0}(ctgx)^{sin\,x}$.

Решение. Имеем неопределенность 0^0. Для ее устранения выполним те же преобразования, что и в предыдущей задаче.

$ln\,y = sin\,x\cdot ln\,ctgx$, $\lim_{x\to 0} ln\,y = \lim_{x\to 0}(sin\,x\cdot ln\,ctgx) =$ /неопределенность $0\cdot\infty$/ $= \lim_{x\to 0}\frac{ln\,ctgx}{\frac{1}{sin\,x}} =$ /устраняем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ применением правила

Лопиталя/ $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\dfrac{1}{ctgx}\cdot\dfrac{1}{sin^2 x}}{-\dfrac{1}{sin^2 x}\cdot cos\,x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos\,x}{ctgx} = \lim\limits_{x\to 0} sin\,x = 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{sin\,x} = 1$.

В задачах **185 – 192** вычислить пределы данных функций, применяя правило Лопиталя.

185. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - sin\,x}{x^3}$.

186. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{ln\,sin\,x}{(\pi - 2x)^2}$.

187. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\,ln\,x\right)$.

188. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$.

189. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot ln\,sin\,x\right)$.

190. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} sin(2x-1)\cdot tg\pi x$.

191. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx - \dfrac{1}{x}\right)$.

192. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{ctgx}$.

4. 2. Экстремум функции

Основные понятия

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на интервале (a; b), если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции, то есть если $a < x_1 < x_2 < b$, то $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Достаточные признаки возрастания и убывания функции:

Если производная $f'(x)$ дифференцируемой функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) в каждой точке интервала (a; b), то функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Функция $y = f(x)$ имеет *максимум* при $x = x_1$ (в точке x_1), если ее значение $f(x_1)$ больше значений функции во всех точках x окрестности точки x_1, то есть $f(x_1) > f(x)$.

Функция $y = f(x)$ имеет *минимум* при $x = x_2$ (в точке x_2), если ее значение $f(x_2)$ меньше значений функции во всех точках x окрестности точки x_2, то есть $f(x_2) < f(x)$.

Значения аргумента, при которых достигаются экстремумы функции, называются *точками ее экстремума.*

Необходимое условие экстремума функции:

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_1 экстремум, то $f'(x_1) = 0$.

Точки, в которых производная функции равна нулю, называются *стационарными.*

Непрерывная функция может иметь экстремум и в точках ее недифференцируемости.

Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются *критическими* точками функции.

Первый достаточный признак экстремума функции:

если слева от критической точки x_1 функции $y = f(x)$ ее производная y' положительна (отрицательна), а справа – отрицательна (положительна), то x_1 есть точка максимума (минимума) функции $y = f(x)$.

Второй достаточный признак экстремума функции:

Если в критической точке x_1 вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна), то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_1 минимум (максимум).

В задачах **193 – 200** найти интервалы возрастания и убывания функций.

193. $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.

Решение. Находим производную данной функции:

$$y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3\left(x^2 + 2x + 1\right) = 3(x+1)^2.$$

Производная неотрицательна, поэтому (исходя из достаточного признака возрастания функции) данная функция возрастает на всей числовой оси.

194. $y = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 1$.

Решение. Находим производную функции и ее интервалы знакопостоянства, используя метод интервалов при решении неравенств.

$$y' = -6x^2 + 30x - 24 = -6(x-1)(x-4).$$

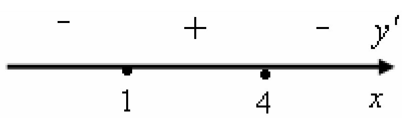


Рис. 6

Производная отрицательна на множестве $(-\infty;1)\,U\,(4;\infty)$, поэтому исследуемая функция здесь убывает; на интервале $(1;4)$ функция возрастает, так как ее производная здесь положительна (рис. 6).

195. $y = x^2 e^{-x}$.

Решение. Находим производную функции и ее интервалы знакопостоянства (рис. 7) : $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x} x(2 - x)$.

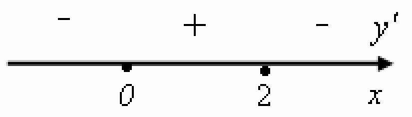


Рис. 7

Функция возрастает на интервале $(0;2)$ и убывает на интервале $(-\infty;0)U\,(2;\infty)$.

В задачах **196 – 200** исследовать на экстремум функции.

196. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Решение. Как и в предыдущих задачах, находим интервалы знакопостоянства производной исследуемой функции (рис 8).

$$y' = -4x^3 + 4x = -4x\left(x^2 - 1\right). \quad y' = 0 \text{ при } x = -1;\ x = 0;\ x = 1.$$

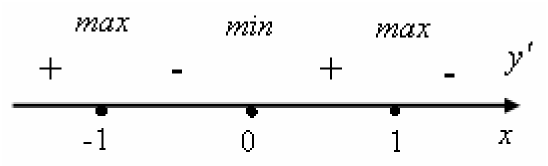


Рис. 8

При переходе через точки $x = -1$ и $x = 1$ производная меняет свой знак с «$-$» на «$+$», поэтому они являются точками максимума данной функции; $x = 0$ – точка минимума.

197. $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$.

Решение. $y' = 4 \cdot \dfrac{4 + x^2 - 2x^2}{\left(4 + x^2\right)^2} = 4 \cdot \dfrac{4 - x^2}{\left(4 + x^2\right)^2}$. $y' = 0$ при $x = \pm 2$.

Интервалы знакопостоянства производной и точки экстремума функции даны на рис. 9.

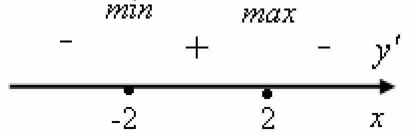


Рис. 9

$x = -2$ - точка минимума; $x = 2$ - точка максимума.

198. $y = \dfrac{x}{ln\, x}$.

Решение. $y' = \dfrac{ln\, x - x \cdot \dfrac{1}{x}}{ln^2 x} = \dfrac{ln\, x - 1}{ln^2 x}$. $y' = 0$ при $x = e$ и y' не существует при $x = 1$ (в этой точке не определена и данная функция). $x = e$ - точка минимума (рис. 10).

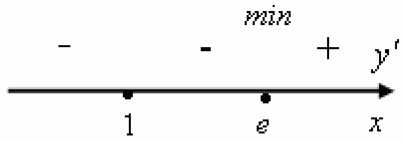


Рис. 10

199. $y = (x^2 - 4)\sqrt[3]{x^2}$.

Решение. $y' = 2x\sqrt[3]{x^2} + \left(x^2 - 4\right) \cdot \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 2 \cdot \dfrac{3x^2 + x^2 - 4}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}}$.

$y' = 0$ при $x = \pm 1$; y' не существует при $x = 0$. Имеем три критические точки (рис. 11).

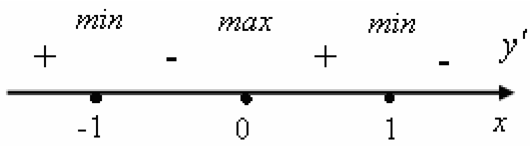


Рис. 11

При $x = \pm 1$ функция имеет минимум, $x = 0$ – максимум.

200. $y = x - arctgx$.

Решение. $y' = 1 - \dfrac{1}{1 + x^2} = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$. Найденная производная неотрицательна на области определения исследуемой функции, данная функция возрастает и экстремума не имеет.

В задачах **201 – 208** данные функции исследовать на экстремум.

201. $y = 2x^2 - 4x + 5$. **202.** $y = x^3 + \dfrac{9x^2}{2} - 5$.

203. $y = 3 + 2x^2 - x^4$. **204.** $y = 3x - \dfrac{27}{2-x}$.

205. $y = 2e^x + e^{-x}$. **206.** $y = ln\,x + \dfrac{1}{x}$.

207. $y = x - arctg2x$.

208. $y = sin2x - x$ на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. 3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке [a; b], достигает своих *наибольшего* и *наименьшего* значений либо в точках экстремума, либо на концах отрезка. Поэтому для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке нужно:

1) найти критические точки функции, принадлежащие интервалу (a; b) и ее значения в этих точках;

2) вычислить значения функции на концах отрезка, то есть найти $f(a)$ и $f(b)$;

3) из значений функции, полученных в 1) и 2), выбрать наибольшее и наименьшее число.

В задачах **209 – 211** найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанных отрезках.

209. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$, [0; 3].

Решение. Находим производную функции, ее корни.

$$y' = 3x^2 - 18x + 24 = 3\left(x^2 - 6x + 8\right).$$

$y' = 0$ при $x_1 = 2$; $x_2 = 4$. Вычислим значения функции на концах отрезка и в критической точке $x_1 = 2$ (точка $x_2 = 4$ не рассматривается, так как она не принадлежит данному отрезку): $y(0) = -10$; $y(3) = 8$; $y(2) = 0$.

Итак, наибольшее значение функции $M = 10$; наименьшее $-m = -10$.

210. $y = x + \sqrt{x}$, [0; 4].

Решение. $y' = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$, поэтому данная функция возрастает и $M = y(4) = 6$; $m = y(0) = 0$.

211. $y = tgx - x$, $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Решение. Так как $y' = \frac{1}{cos^2 x} - 1 = \frac{1 - cos^2 x}{cos^2 x} = tg^2 x \geq 0$, то функция возрастает и $M = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$; $m = y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 1$.

212. Полная поверхность цилиндра равна S. Какие размеры должен иметь цилиндр, чтобы его объем был наибольшим?

Решение. Пусть R – радиус основания, H – высота цилиндра. Объем цилиндра $V = \pi R^2 H$. Площадь S полной поверхности цилиндра определяется по формуле $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$, откуда $H = \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R}$. Тогда

$V = \pi R^2 \cdot \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R} = \frac{1}{2}\left(SR - 2\pi R^3\right)$. Отсюда $V' = \frac{1}{2}\left(S - 6\pi R^2\right)$ и $V' = 0$ при $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ (противоположное отрицательное значение R не может быть ответом по смыслу задачи).

Производная V' положительна при $0 < R < \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ и отрицательна при $R > \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. Следовательно, при $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ объем цилиндра будет наибольшим. В этом случае $H = \frac{S - 2\pi \cdot \frac{S}{6\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

213. Сечение оросительного канала имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон пропускная способность канала будет наибольшей?

Решение. Пропускная способность канала зависит от площади его поперечного сечения: чем больше площадь трапеции, тем больше количество воды проходит по каналу.

Изобразим сечение канала (рис. 12).

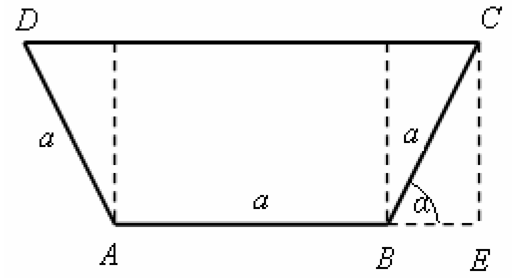


Рис. 12

Обозначим *AB=BC=AD=a*. Найдем площадь *S* трапеции *ABCD.*

$$S=\frac{AB+CD}{2}\cdot CE=\frac{a+a+2a\cos\alpha}{2}\cdot a\sin\alpha=a^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha .$$

По смыслу задачи угол α изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Решение задачи сводится к нахождению наибольшего значения функции $S=S(\alpha)$ на отрезке $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Найдем критические точки функции *S*, принадлежащие интервалу $(0;\frac{\pi}{2})$:

$$S'=a^2\left[-\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)\cos\alpha\right]=a^2\left(-1+\cos^2\alpha+\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)=$$

$=a^2\left(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1\right)$. Отсюда $\cos\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha_2=-1, \alpha_1=\frac{\pi}{3}, \alpha_2=\pi$.

Найдем значения функции *S* в точке $\alpha_1=\frac{\pi}{3}$ и на концах отрезка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$S(\alpha_1)=S\left(\frac{\pi}{3}\right)=a^2\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\approx 1{,}28a^2;\ S(0)=0;\quad S\left(\frac{\pi}{2}\right)=a^2.$$

Итак, площадь сечения канала будет наибольшей, если угол наклона боковой стороны равен 60° (в этом случае верхнее основание трапеции в два раза больше нижнего) и, следовательно, его пропускная способность будет наибольшей.

214. Открытый сверху резервуар с квадратным дном должен вмещать 108 литров воды. Каковы должны быть размеры резервуара, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?

Решение. Обозначим через *x дм* длину стороны квадрата, *y дм* – высоту резервуара. Тогда площадь *S* его поверхности равна $S=x^2+4xy$.

Объем резервуара $V=x^2y=108$, откуда $y=\frac{108}{x^2}$.

Тогда $S = x^2 + 4x \cdot \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}$.

Отсюда $S' = 2x - \frac{432}{x^2} = 2 \cdot \frac{x^3 - 216}{x^2}$. $S' = 0$ при $x = 6$.

$S' < 0$ при $x < 6$ и $S' > 0$ при $x > 6$, следовательно $x = 6$ – точка максимума функции S.

Итак, оптимальные размеры резервуара – 6*дм* х 6*дм* х 3*дм*.

215. Определить размеры цилиндра, вписанного в шар радиуса R, чтобы объем цилиндра был наибольшим.

Решение. Изобразим осевое сечение рассматриваемых тел (рис. 13).

Объем V цилиндра равен $V = \pi r^2 h$.

Из прямоугольного треугольника ABC имеем: $AB^2 + AC^2 = BC^2$;

$4r^2 + h^2 = 4R^2$; $\quad r^2 = \frac{1}{4}\left(4R^2 - h^2\right)$.

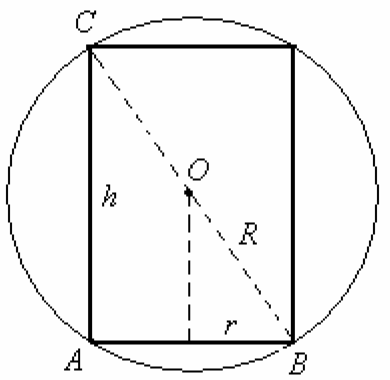


Рис. 13

Тогда $V = \pi \cdot \frac{1}{4}\left(4R^2 - h^2\right) \cdot h = \frac{\pi}{4}\left(4R^2 h - h^3\right)$.

Найдем максимум этой функции.

$V' = \frac{\pi}{4}\left(4R^2 - 3h^2\right)$. Производная $V' = 0$ при $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ (противоположное значение h не соответствует условию задачи). При этом значении h объем V цилиндра будет наибольшим (это легко проверяется). Тогда $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$.

216. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного сверху полукругом. Периметр сечения равен 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

217. Положительное число n представить в виде суммы двух слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

218. Требуется вырыть яму конической формы (воронку) с образующей, равной l м. При какой глубине воронки ее объем будет наибольшим?

219. Объем прямого кругового конуса равен V. При каком радиусе основания конус будет иметь наименьшую полную поверхность?

220. В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник наибольшей площади.

221. Из прямоугольного листа жести размером 30 × 50 см требуется изготовить открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

222. Данное положительное число разложить на два положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

223. Требуется вырыть яму цилиндрической формы с круглым основанием и вертикальной боковой поверхностью заданного объема V. Каковы должны быть линейные размеры ямы, чтобы на облицовку ее дна и боковой поверхности пошло наименьшее количество материала?

224. Полная поверхность цилиндра равна S. Какие размеры должен иметь цилиндр, чтобы его объем был наибольшим?

225. Открытый сверху резервуар с квадратным дном нужно вылудить внутри оловом. Каковы должны быть размеры резервуара, чтобы на его лужение пошло наименьшее количество олова, если он должен вмещать 108 *л* воды?

226. Боковая поверхность прямого кругового конуса равна S. Найти радиус основания конуса, при котором он имеет наибольший объем.

227. Найти радиус основания и высоту прямого кругового конуса, вписанного в шар радиуса R так, чтобы его объем был наибольшим.

4. 4. Выпуклость и вогнутость кривой и точки ее перегиба. Асимптоты кривой

Основные понятия

Кривая $y=f(x)$ называется *выпуклой* на интервале (a; b), если дуга кривой расположена ниже любой своей касательной для этого интервала.

Кривая $y=f(x)$ называется *вогнутой* на интервале (a; b), если дуга кривой расположена выше любой своей касательной для этого интервала.

Точки, отделяющие выпуклую часть кривой от ее вогнутой части, называются *точками перегиба* кривой.

Теорема 1. (*Достаточный признак вогнутости кривой*).

Если вторая производная $f''(x)$ *дважды дифференцируемой функции* $y=f(x)$ *положительна во всех точках интервала (a; b), то кривая* $y=f(x)$ *вогнута на этом интервале.*

Теорема 2. (*Достаточный признак выпуклости кривой*).

Если вторая производная $f''(x)$ *дважды дифференцируемой функции* $y=f(x)$*отрицательна во всех точках интервала (a; b), то кривая* $y=f(x)$ *выпукла на этом интервале.*

Значения аргумента *x*, при которых вторая производная равна нулю либо не существует, называются *критическими точками второго рода.*

Достаточный признак существования точки перегиба: *если при переходе через критическую точку* x_1 *второго рода вторая производная* $f''(x)$ *меняет свой знак, то точка* $A(x_1; f(x_1))$ *является точкой перегиба кривой* $y=f(x)$.

Прямая *l* называется *асимптотой* кривой $y=f(x)$, если по мере стремления точки *M*(*x*; *y*) кривой в бесконечность расстояние от этой точки до прямой l уменьшается, стремясь к нулю.

Если асимптота параллельна оси ординат, то она называется *вертикальной.* В противном случае асимптота называется *наклонной*.

Параметры k и b наклонной асимптоты $y=kx+b$ определяются по формулам

$$\boldsymbol{k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}} \quad (4.1)\ ; \qquad \boldsymbol{b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]}. \quad (4.\ 2)$$

Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти те значения аргумента, при которых функция неограниченно возрастает по абсолютной величине.

В задачах **228** – **230** найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривых.

228. $y=x^3-6x^2+12x+4$.

Решение. Дважды дифференцируем данную функцию:

$$y'=3x^2-12x+12;\quad y''=6x-12.$$

Найдем критические точки второго рода: $6x-12=0$; $x=2$.

$y''<0$ при $x<2$, значит на интервале $(-\infty;2)$ кривая выпукла;

$y''>0$ при $x>2$, значит на интервале $(2;\infty)$ кривая вогнута.

$x=2$ - точка перегиба.

229. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 12}$.

Решение. Найдем критические точки второго рода данной функции.

$$y' = \frac{3x^2\left(x^2+12\right) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2+12\right)^2} = \frac{x^4 + 36x^2}{\left(x^2+12\right)^2};$$

$$y'' = \frac{\left(4x^3 + 72x\right)\left(x^2+12\right)^2 - \left(x^4+36x^2\right)\cdot 2\left(x^2+12\right)\cdot 2x}{\left(x^2+12\right)^4} = \frac{24x\left(36 - x^2\right)}{\left(x^2+12\right)^3}.$$

$y'' = 0$ при $x = 0,\ x = \pm 6$.

Эти три точки разбивают числовую ось на четыре интервала: $(-\infty;-6)$; $(-6;0)$; $(0;6)$; $(6;\infty)$ (рис. 14).

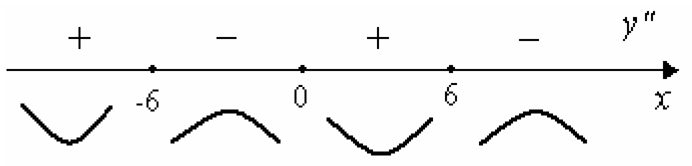


Рис. 14

В первом и третьем вторая производная положительна, поэтому данная кривая на этих интервалах вогнута; на втором и четвертом интервалах $f''(x)$ отрицательна и кривая выпукла.

При $x = -6$; $x = 0$; $x = 6$ кривая имеет перегиб.

230. $y = \dfrac{x}{e^x}$.

Решение. Находим критические точки второго рода.

$$y' = \frac{e^x - xe^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{1-x}{e^x}; \quad y'' = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{x-2}{e^x}.$$

$y'' < 0$ при $x \subset (-\infty; 2)$, на этом интервале кривая выпукла и $y'' > 0$ при $x \subset (2; \infty)$, здесь кривая вогнута.

В задачах **231 – 234** найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графиков данных функций.

231. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$.

232. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

233. $y = (x+2)^6 + 2x + 2$.

234. $y = ln\left(x^2 + 1\right)$.

235. Показать, что кривая $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

236. При каких значениях a и b точка $(1;\,3)$ является точкой перегиба кривой $y = ax^3 + bx^2$

В задачах **237 – 243** найти асимптоты кривых.

237. $y = \dfrac{2x^2 - 9}{x+2}$.

Решение. Прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой, так как при $x \to -2$ функция бесконечно велика по абсолютной величине.

По формулам (4. 1) и (4. 2) определим параметры k и b наклонной асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-9}{(x+2)x} = 2\,;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-9}{x+2} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-4x-9}{x+2}\right) = -4.$$

Прямая $y = 2x - 4$ является наклонной асимптотой данной кривой.

238. $y = \dfrac{2x}{x-1}$.

Решение. Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой, так как $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{x-1} = \infty$. По формулам (4. 1) и (4. 2) определим параметры k и b наклонной асимптоты: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x \;\; -1}{(x-1)x} = 0\,;$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = 2\,.$$

Прямая $y = 2$ является горизонтальной асимптотой данной кривой.

239. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. Кривая вертикальных асимптот не имеет. Найдем наклонные асимптоты $y = k\,x + b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^4+x^2}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\left(1+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=0.$$

Следовательно, $y=x$ есть асимптота данной кривой.
В силу четности данной функции и прямая $y=-x$ также есть асимптота.

Итак, прямые $y=\pm x$ есть асимптоты данной функции.

240. $y=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$.

Решение. Вертикальных асимптот кривая не имеет. Найдем наклонные асимптоты $y=kx+b$.

$$\kappa=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-6x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^3-6x^2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1-\frac{6}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-6x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-6x^2-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3-6x^2\right)^2}+\sqrt[3]{x^3-6x^2}\cdot x+x^2}=$$

$$=-6\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{6}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{6}{x}}+1}=-6\cdot\frac{1}{3}=-2.$$

Прямая $y=x-2$ есть асимптота данной кривой.

241. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$. **242.** $y=\dfrac{1}{1-e^x}$.

243. $y=\dfrac{1}{2x^2+x-1}$.

4. 5. Исследование функции и построение ее графика

Исследование функции и построение ее графика проводится по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функции на непрерывность.

3. Исследовать функцию на четность, нечетность.

4. Найти интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума.

5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки его перегиба.

6. Найти асимптоты графика функции.

7. Для уточнения вида кривой можно найти дополнительные точки графика (например, точки его пересечения с осями координат).

8. Используя результаты пунктов 1 – 7, построить график функции.

В задачах **244 - 247** исследовать функции и построить их графики.

244. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$.

Решение. 1. Функция определена при всех значениях аргумента x. Область определения – вся числовая ось.

2. Функция непрерывна на всей числовой оси; точек разрыва не имеет.

3. Функция не является ни четной, ни нечетной (функция общего вида).

4. Найдем точки экстремума и интервалы монотонности функции.

$y'=x^2-2x-3$; $y'=0$ при $x=-1$ и $x=3$. Эти критические точки разбивают числовую ось на три интервала: $(-\infty;-1)$; $(-1;3)$; $(3;\infty)$ (рис. 15).

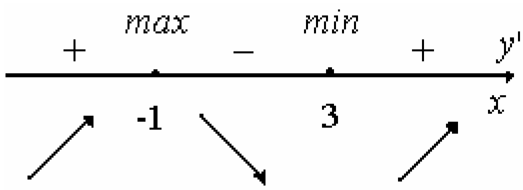


Рис. 15

Первая производная положительна в первом и третьем интервалах, здесь данная функция возрастает; на промежутке $(-1;3)$ производная отрицательна и здесь функция убывает. Следовательно, при $x=-1$ функция имеет максимум, при $x=3$ - минимум.

Значит, $A\left(-1;1\frac{1}{3}\right)$ - точка максимума, $B(3;-9)$ - минимума.

5. Для отыскания интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба находим корни второй производной и интервалы ее знакопостоянства.

$y''=2x-2$; $y''=0$ при $x=1$. $y''<0$ при $x<1$, поэтому на интервале $(-\infty;1)$ кривая выпукла; $y''>0$ при $x>1$, следовательно на интервале

$(1;\infty)$ кривая вогнута; $C\left(1;-3\frac{2}{3}\right)$ - точка перегиба.

6. Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$, кривая не имеет асимптот.

7. График функции проходит через начало координат.

8. На рис 16. изображен график исследуемой функции.

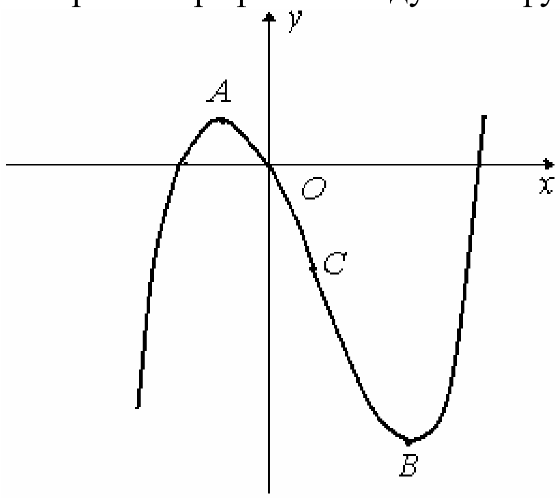


Рис. 16

245. $y=\dfrac{3x}{x^2+1}$.

Решение. 1. Областью определения функции является вся числовая ось.

2. Функция непрерывна на интервале $(-\infty;\infty)$.

3. $y(-x)=\dfrac{3(-x)}{(-x)^2+1}=-\dfrac{3x}{x^2+1}=-y(x)$.

Данная функция является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат.

4. Исследуем функцию на экстремум.

Производная $y'=3\cdot\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ равна нулю при $x=\pm 1$.

$y'>0$ при $x\in(-1;1)$, поэтому на этом интервале функция возрастает.

$y'<0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$, здесь функция убывает.

$A(-1;-1{,}5)$ - точка минимума, $B(1;1{,}5)$ - точка максимума.

5. Вторая производная $y''=6\cdot\dfrac{x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$ обращается в ноль при

$x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$.

$y'' > 0$ при $x \in \left(-\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right)$, на этих интервалах кривая вогнута.
$y'' < 0$ при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(0; \sqrt{3}\right)$, на этих интервалах кривая выпукла.

Точки $C\left(-\sqrt{3}; -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $O(0; 0)$, $D\left(\sqrt{3}; \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ есть точки перегиба графика функции.

6. Определим асимптоты кривой.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\left(x^2+1\right)x} = 0; \quad b = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x^2+1} = 0;$$

Следовательно, прямая $y = 0$ (ось Ox) есть асимптота графика исследуемой функции.

7. Кривая проходит через начало координат.

8. График исследуемой функции представлен на рис. 17.

246. $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$.

Решение. 1. Функция определена при всех значения x за исключением $x = \pm 2$.

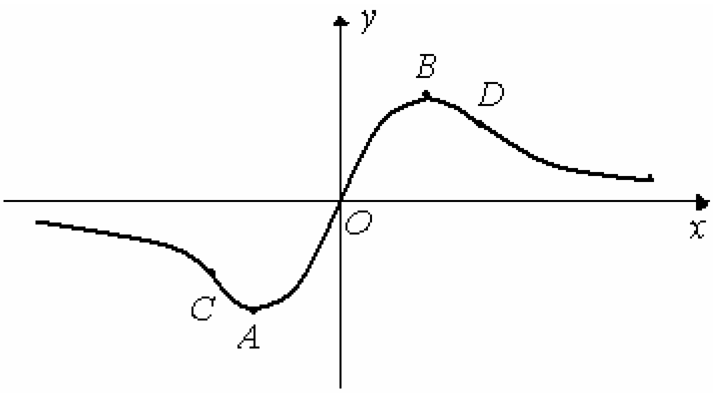


Рис. 17

2. Функция непрерывна на интервалах $(-\infty; -2); (-2; 2); (2; \infty)$.
$x = \pm 2$ - точки разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to -2-0} y = -\infty; \quad \lim_{x\to -2+0} y = \infty; \quad \lim_{x\to 2-0} y = -\infty; \quad \lim_{x\to 2+0} y = \infty \quad .$$

3. Функция нечетная, так как

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2-4} = -y(x).$$

4. Исследуем функцию на экстремум.

Производная $y' = \dfrac{x^4 - 12x^2}{\left(x^2 - 4\right)^2} = \dfrac{x^2\left(x + 2\sqrt{3}\right)\left(x - 2\sqrt{3}\right)}{\left(x^2 - 4\right)^2}$ равна нулю при $x = 0$; $x = \pm 2\sqrt{3}$ и не существует при переходе через точки $x = \pm 2$, то есть имеем пять критических точек. Точки $x = \pm 2$ не могут быть точками экстремума функции, так как при этих значениях аргумента функция не существует.

При переходе через точку $x_1 = -2\sqrt{3}$ производная y' меняет свой знак с плюса на минус, следовательно здесь функция имеет максимум; при переходе через точку $x_2 = 0$ знак производной не меняется, здесь экстремума нет; при переходе через точку $x_3 = 2\sqrt{3}$ производная меняет свой знак с минуса на плюс, здесь функция имеет минимум.

Итак, $A\left(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3}\right)$ - точка максимума, $B\left(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\right)$ - точка минимума данной функции.

5. Вторая производная $y'' = \dfrac{8x\left(x^2 + 12\right)}{\left(x^2 - 4\right)^3}$ равна нулю при $x = 0$ и не существует при $x = \pm 2$. Эти три точки разбивают область определения функции на четыре интервала: $(-\infty; -2); (-2; 0); (0; 2); (2; \infty)$. В первом и третьем интервалах вторая производная отрицательна и здесь данная кривая выпукла; $y'' > 0$ во втором и четвертом интервалах, здесь кривая вогнута. Так как при переходе через точку $x = 0$ вторая производная меняет свой знак, то $O(0; 0)$ есть точка перегиба кривой.

6. Прямые $x = \pm 2$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Определим наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{\left(x^2 - 4\right)x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - \dfrac{4}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ есть наклонная асимптота графика функции.

7. График функции проходит через начало координат и изображен на рис. 18.

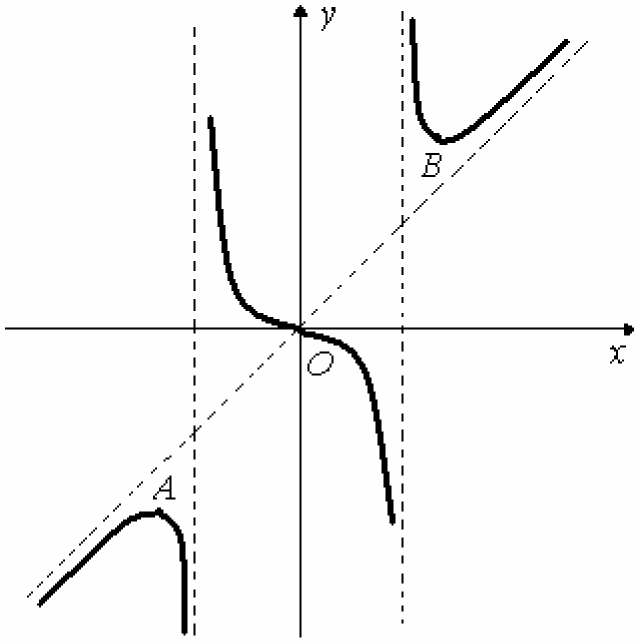


Рис. 18

247. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

Решение. 1. Функция определена на всей числовой оси.

2. Непрерывна на интервале $(-\infty;\infty)$.

3. Не является ни четной, ни нечетной (функция общего вида).

4. Находим производную $y'=\frac{1}{3}\left(1-x^3\right)^{-2/3}\cdot\left(-3x^2\right)=-\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}$.

Она равна нулю при $x=0$, не существует при $x=1$ и отрицательна при всех остальных значениях *x*. Поэтому функция убывает на всей области определения и не имеет точек экстремума.

5. Вторая производная $y''=-\frac{2x}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^5}}$ равна нулю при $x=0$ и

не существует при $x=1$. Две эти критические точки второго рода разбивают числовую ось на три интервала: $(-\infty;0)$; $(0;1)$; $(1;\infty)$. На первом и третьем интервалах $y''>0$, здесь кривая вогнута; на втором интервале $y''<0$, здесь кривая выпукла; точки $A(0;1)$ и $B(1;0)$ являются точками перегиба графика функции.

6. Вертикальных асимптот кривая не имеет. Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt[3]{x^3-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x - \sqrt[3]{x^3-1}\right)\left(x^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + \sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}\right)}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + \sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + 1}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3-1} + \sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = -x$ является асимптотой графика исследуемой функции, представленного на рис. 19.

В задачах **248 - 261** исследовать функции и построить их графики.

248. $y = 2x^2 - \dfrac{x^3}{3}$. **249.** $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$.

250. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. **251.** $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

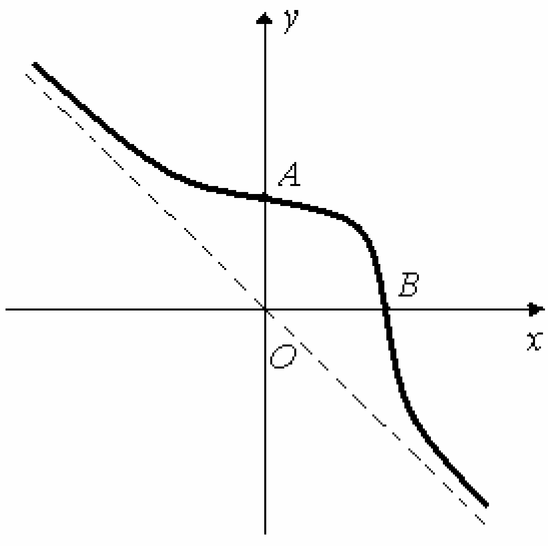


Рис. 19

252. $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$. **253.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

254. $y = ln\left(x^2+1\right).$ **255.** $y = 4x^2 \, ln\, x$.

256. $y = \dfrac{ln\, x}{\sqrt{x}}$. **257.** $y = x + ln\left(x^2-1\right).$

258. $y = e^{-x^2}$. **259.** $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

260. $y = x - 2arctgx$. **261.** $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

4. 6. Кривизна плоской кривой

Основные понятия

Углом смежности дуги AB кривой $y = f(x)$ называется угол φ между касательными, проведенными в точках A и B этой кривой (рис. 20).

Средней кривизной K_{cp} дуги AB кривой $y = f(x)$ называется отношение угла смежности φ к длине s этой дуги, то есть $K_{cp} = \dfrac{\varphi}{s}$.

Кривизной K кривой $y = f(x)$ в точке A называется предел средней кривизны дуги AB при $B \to A$, то есть $K = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{\varphi}{s}$.

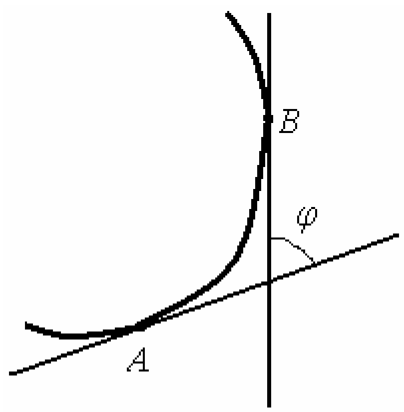


Рис. 20

При задании линии уравнением $y = f(x)$ ее кривизна вычисляется по формуле

$$K = \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}. \qquad (4.\ 3)$$

Из формулы (4. 3) следует: если кривая выпуклая (в этом случае $y''<0$), ее кривизна отрицательна; вогнутая кривая имеет положительную кривизну. В точках перегиба кривизна кривой равна нулю. В точках экстремума кривизна равна значению второй производной.

Если линия задана параметрическими уравнениями: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ее кривизна вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{K}=\frac{x'y''-y'x''}{\left[(x')^2+(y')^2\right]^{3/2}}. \tag{4. 4}$$

Если линия задана в полярной системе координат уравнением $r=f(\varphi)$, то ее кривизна находится по формуле

$$\boldsymbol{K}=\frac{r^2+2(r')^2-rr''}{\left[r^2+(r')^2\right]^{3/2}}. \tag{4. 5}$$

Радиусом R *кривизны* называется величина, обратная абсолютной величине кривизны K, то есть $\boldsymbol{R}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{K}|}$.

Окружностью кривизны данной линии в ее точке A называется предельное положение окружности, проходящей через три точки A, B, C кривой при $B\to A$, $C\to A$.

Центром кривизны называется центр окружности кривизны, находящийся на нормали к линии, проведенной в точке A в сторону вогнутости этой линии. Координаты центра кривизны $C(x_c;\, y_c)$ точки $M(x;\, y)$ кривой $y=f(x)$ находятся по формулам

$$x_c=x-\frac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''};\qquad y_c=y+\frac{1+(y')^2}{y''}. \tag{4. 6}$$

Каждой точке M кривой $y=f(x)$ (L), кривизна которой отлична от нуля, соответствует точка C – центр кривизны. Совокупность этих центров образует новую линию L_1, которая называется *эволютой* кривой L. Тогда сама кривая L по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой.* Данная кривая может иметь лишь одну эволюту, но у данной эволюты существует бесконечное множество эвольвент.

262. Найти кривизну кривой $y=ln\,x$ в точке $A(1;\,0)$.

Решение. Имеем $y'=\dfrac{1}{x}$; $y''=-\dfrac{1}{x^2}$. По формуле (4. 3) получаем:

$$K = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = -\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}.$$ При $x=1$ получаем $K_A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

263. Найти кривизну кардиоиды $r = a(1-cos\,\varphi)$ в точке $A(\pi;\,2a)$.

Решение. Находим $r' = a\,sin\,\varphi$; $r'' = a\,cos\,\varphi$ и по формуле (4. 5) имеем:

$$K = \frac{a^2(1-cos\,\varphi)^2 + 2a^2\,sin^2\,\varphi - a^2\,cos\,\varphi(1-cos\,\varphi)}{\left[a^2(1-cos\,\varphi)^2 + a^2\,sin^2\,\varphi\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{1-2cos\,\varphi + cos^2\,\varphi + 2\,sin^2\,\varphi - cos\,\varphi + cos^2\,\varphi}{a\left(1-2cos\,\varphi + cos^2\,\varphi + sin^2\,\varphi\right)^{3/2}} = \frac{3}{4a\,sin\frac{\varphi}{2}}.$$

При $\varphi = \pi$ имеем $K_A = \frac{3}{4a}$.

264. Найти радиус кривизны эллипса $x = 4cos\,t$, $y = 3sin\,t$ в точке $t = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Находим $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3cos\,tdt}{-4sin\,tdt} = -\frac{3}{4}ctgt$;

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{sin^2\,t}\right)dt}{-4sin\,tdt} == -\frac{3}{16sin^3\,t}.$$

По формуле (4. 3) имеем: $K \;= -\frac{3}{16sin^3\,t\sqrt{\left(1+\frac{9}{16}ctg^2 t\right)^3}} =$

$$= -\frac{12}{\sqrt{\left(16sin^2\,t + 9cos^2\,t\right)^3}}.$$

Отсюда $K_A = K\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{24\sqrt{2}}{125}$.

Тогда радиус кривизны $R = \frac{1}{|K|} = \frac{125}{24\sqrt{2}}$.

В задачах **265 – 270** найти кривизну данных кривых.

265. $y=-x^3$ в точке $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{8}\right)$.

266. $y=x^3$ в точке $(1;1)$.

267. $y=x^2$ в точке $(1;1)$.

268. $y=x^3+x^2-4$ в точке $(0;-4)$.

269. $y=\frac{12}{x}$ в точке $(3;4)$.

270. $r=a\varphi$ – спираль Архимеда.

В задачах **271 – 275** найти радиус кривизны данных кривых.

271. $y=\sin x$ в точке $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.

272. $y=tgx$ в точке $\left(\frac{\pi}{4};1\right)$.

273. $y=\ln x$ в точке $(1;0)$.

274. $y=2\sqrt{2x}$ в точке $\left(\frac{8}{9};3\right)$.

275. $y=x\sqrt{x}$ в точке $(4;8)$.

276. Найти координаты центра кривизны кривой $y=x^2-6x+10$ в точке $A(3;1)$.

Решение. Дважды дифференцируем данную функцию: $y'=2x-6$; $y''=2$. Тогда $y'(3)=0$; $y''(3)=2$. По формулам (4. 6) имеем:

$$x_c=x-\frac{y'\left[1+(y')^2\right]}{y''}=3-0=3; \qquad y_c=y+\frac{1+(y')^2}{y''}=1+\frac{1}{2}=1{,}5.$$

Следовательно, точка $C(3;1{,}5)$ есть центр кривизны точки A данной кривой.

В задачах **277 – 281** найти центры кривизны данных кривых в указанных точках.

277. $y=e^x$ в точке (0; 1).

278. $y=\frac{1}{3}x^3$ в точке $\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

279. $y=\cos x$ в точке $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

280. $y^2 = x^3$ в точке $(1;\ 1)$.

281. $x^3 + y^4 = 2$ в точке $(1;\ 1)$.

282. Составить уравнение эволюты параболы $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$.

Решение. Находим $y' = x$; $y'' = 1$. По формулам (4. 6) получаем:

$$x_c = x - \frac{x\left(1 + x^2\right)}{1} = -x^3\ ;\quad y_c = y + \frac{1 + x^2}{1} = \frac{x^2}{2} - 1 + 1 + x^2 = -\frac{3}{2}x^2 .$$

Обозначим текущие координаты точек эволюты через X и Y. Тогда уравнение эволюты имеет следующий параметрический вид: $\begin{cases} X = -x^3\ ; \\ Y = \frac{3}{2}x^2 \end{cases}$.

Здесь x – параметр. Исключив параметр x, получаем искомое уравнение эволюты $X^2 = \frac{8}{27}y^3$, представленной на рис. 21 «жирно» выделенной линией.

283. Составить уравнение эволюты эллипса $x = a\cos t\ ;\ y = b\sin t$.

Решение. Дважды дифференцируем параметрически заданную функцию:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t dt}{-a\sin t dt} = -\frac{b}{a}ctg t;\qquad y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{-\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)dt}{-a\sin t dt} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

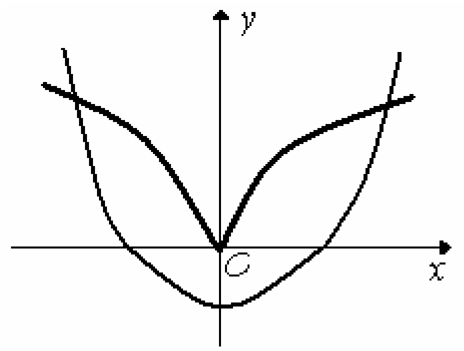


Рис. 21

По формулам (4. 6) находим координаты центра кривизны:

$$x_c = a\cos t - \frac{-\frac{b}{a}ctgt\left(1+\frac{b^2}{a^2}ctg^2 t\right)}{-\frac{b}{a^2 \sin^3 t}} = a\cos t - a\cos t \sin^2 t - \frac{b^2}{a}\cos^3 t =$$

$$= a\cos t\left(1-\sin^2 t\right) - \frac{b^2}{a}\cos^3 t = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t\,.$$

Подобным образом находим $y_c = \dfrac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t\,.$

Обозначив текущие координаты эволюты через X и Y, получаем уравнение эволюты в следующем параметрическом виде:

$$X = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t\,; \quad Y = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t\,.$$

График эволюты представлен на рис. 22 «жирно» выделенной линией.

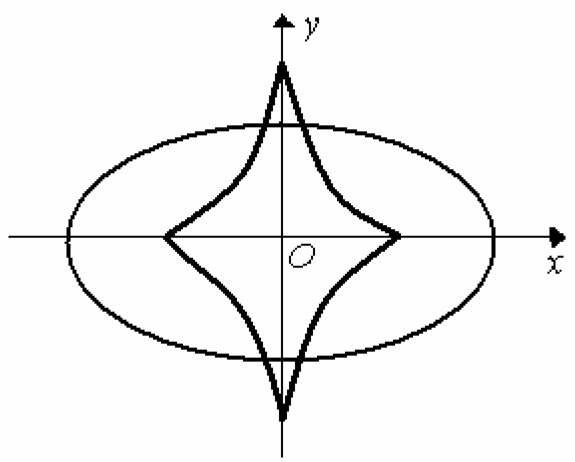


Рис. 22

В задачах **284 – 287** составить уравнения эволюты для указанных кривых.

284. $2y^2 = 2x+1$.

285. $x^2 - y^2 = 1$.

286. $x = 2\cos t\,; \quad y = \sin t$.

287. $x = a\left(\cos t + t\sin t\right)\,; \quad y = a\left(\sin t - t\cos t\right)$.

4. 7. Производная векторной функции скалярного аргумента

Основные понятия

Пусть пространственная кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Текущей точке $M(x; y; z)$ этой кривой поставим в соответствие вектор $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{r} = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$, являющийся *векторной функцией* скалярного аргумента t. Кривая L называется *годографом* функции $r = r(t)$, начало координат называют *полюсом* годографа.

Производной $r'(t)$ векторной функции $r = r(t)$ по скалярному аргументу t называется предел отношения приращения Δr к приращению Δt при $\Delta t \to 0$, то есть $r'(t) = \dfrac{dr}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta r}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \dfrac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \dfrac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$.

Этот вектор направлен по касательной к годографу вектора $\boldsymbol{r}$ в сторону возрастания параметра t.

Уравнение касательной к пространственной кривой $\boldsymbol{r} = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$ в точке $M_o(x_o; y_o; z_o)$ имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_o}{x'(t_o)} = \frac{y - y_o}{y'(t_o)} = \frac{z - z_o}{z'(t_o)}, \tag{4. 7}$$

где $x_o = x(t_o)$; $y_o = y(t_o)$; $z_o = z(t_o)$.

Нормальной плоскостью называется плоскость, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной. Ее уравнение имеет вид

$$x'(t_o)\cdot(x - x_o) + y'(t_o)\cdot(y - y_o) + z'(t_o)\cdot(z - z_o) = 0. \tag{4. 8}$$

288. Найти годограф вектор – функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,cost + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\,sint$.

Решение. Эта линия определяется параметрическими уравнениями $x = cos\,t$; $y = 1$; $z = sin\,t$. Исключив параметр t, получаем окружность $x^2 + z^2 = 1$; $y = 1$ (линия пересечения цилиндра $x^2 + z^2 = 1$ с плоскостью $y = 1$).

В задачах **289, 290** найти годографы данных вектор-функций.

289. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}$.

290. $\boldsymbol{r} = t\,(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$.

291. Составить уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой $x = 2t^2$; $y = ln\,t$; $z = t^3$ в точке $t_o = 1$.

Решение. Найдем координаты точки касания M_o, подставив в уравнения кривой $t_o = 1$. Получаем $M_o(2; 0; 1)$. Находим значения производных в точке M_o:

$$\left[\frac{dx}{dt}\right]_{M_o} = [4t]_{M_o} = 4; \quad \left[\frac{dy}{dt}\right]_{M_o} = \left[\frac{1}{t}\right]_{M_o} = 1; \quad \left[\frac{dz}{dt}\right]_{M_o} = \left[3t^2\right]_{M_o} = 3.$$

Применяем формулы (4. 7) и (4. 8):

$\frac{x-2}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$ − уравнения касательной;

$4\cdot(x-2)+1\cdot y+3\cdot(z-1)=0$; $4x+y+3z-11=0$ − уравнение нормальной плоскости.

292. Составить уравнения касательной к кривой $x=y^2$, $y=\frac{1}{2}z^2$ в точке, для которой $z=2$.

Решение. Данная кривая задана как линия пересечения двух поверхностей. Запишем уравнения этой кривой в параметрическом виде. Пусть $z=t$. Тогда $y=\frac{1}{2}t^2$; $x=\frac{1}{4}t^4$. При $z=t=2$ имеем точку касания $M_o(4;2;2)$. Находим $\left[\frac{dx}{dt}\right]_{M_o}=\left[t^3\right]_{M_o}=8$; $\left[\frac{dy}{dt}\right]_{M_o}=[t]_{M_o}=2$; $\left[\frac{dz}{dt}\right]_{M_o}=[1]_{M_o}=1$.

По формуле (4. 7) получаем искомое уравнение $\frac{x-4}{8}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{1}$.

293. Составить уравнения касательной к винтовой линии $x=a\cos t$; $y=a\sin t$; $z=3at$ при $t=\frac{\pi}{3}$.

294. Составить уравнения касательной к кривой $x^2+y^2+z^2=16$, $x+z-4=0$ в точке $M_o\left(2;2\sqrt{2};2\right)$.

295. На кривой $x=t+1$, $y=t^2-1$, $z=t^3$ найти точку, в которой касательная параллельна плоскости $x+2y+z-1=0$.

296. Составить уравнение нормальной плоскости к винтовой линии $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\cos t+\boldsymbol{j}\sin t+\sqrt{3}\,t\boldsymbol{k}$ в точке $t=\frac{\pi}{2}$.

ГЛАВА 5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Основные понятия и формулы

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* (*первообразной*) для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если на этом интервале $F'(x) = f(x)$.

Очевидно, что для функции $f(x)$ ее первообразными будут функции $F(x) + C$, где C – постоянная величина.

Определение 2. Совокупность первообразных $F(x) + C$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$, то есть $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Здесь функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – переменной интегрирования, C – постоянной интегрирования.

Действие вычисления неопределенного интеграла называется *интегрированием*.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство (множество) *интегральных кривых* $F(x) + C$, получаемых параллельным переносом кривой $y=F(x)$ вдоль оси Oy.

Неопределенный интеграл обладает следующими *свойствами*:

1. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть

$$d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной, то есть

$$\int d[f(x)] = f(x) + C.$$

3. Неопределенный интеграл от суммы нескольких функций равен сумме неопределенных интегралов от слагаемых функций, то есть

$$\int [f(x) + \varphi(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx - \int g(x)dx.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла, то есть

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx.$$

Таблица основных интегралов

Так как интегрирование функций обратно их дифференцированию, то каждая табличная формула производных приводит к соответствующей формуле неопределенных интегралов, которые будем называть табличными.

(I) $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ где } n \neq -1.$$

(II) $$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C.$$

(III) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C.$$

(IV) $$\int e^x dx = e^x + C.$$

(V) $$\int sin\, x dx = -cos\, x + C.$$

(VI) $$\int cos\, x dx = sin\, x + C.$$

(VII) $$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C.$$

(VIII) $$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C.$$

(IX) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C.$$

(X) $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$$

(XI) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

(XII) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$$

(XIII) $$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

5. 1. Непосредственное интегрирование и замена переменной

Метод непосредственного интегрирования основан на применении свойств неопределенного интеграла, табличных формул и тождественных преобразованиях подынтегральной функции.

Если интеграл $\int f(x)dx$ не является табличным, не может быть вычислен методом непосредственного интегрирования, то во многих случаях его можно свести к табличным интегралам путем введения новой переменной.

Если функции $x=\varphi(t)$ и $f[\varphi(t)]$ дифференцируемы на некотором интервале, то справедлива следующая формула:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Этот способ интегрирования называют *методом подстановки.*

Часто при использовании метода подстановки используют подстановку $t=\varphi(x)$. Тогда формула замены переменной имеет вид

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f(t)dt.$$

В задачах **297 – 308** вычислить неопределенные интегралы.

297. $\int\left(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}\right)dx.$

Решение. Применяем свойства 3 и 4 и табличную формулу (I).

$$\int\left(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}\right)dx=4\int x^3dx-\int x^{\frac{1}{2}}dx+6\int x^{-2}dx=$$

$$=x^4-\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{6}{x}+C.$$

298. $\int\left(5\cos x-3e^x\right)dx.$

Решение. $\int\left(5\cos x-3e^x\right)dx=5\sin x-3e^x+C.$

299. $\int\frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}dx.$

Решение. Преобразуем подынтегральную дробь, применим свойства 3, 4 и формулы (I), (II).

$$\int\frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}dx=\int\frac{x^3+2x^2-3x-6}{x^3}dx=\int\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)dx=$$

$$=x+2\ln|x|+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+C.$$

300. $\int\sqrt{1+2x}dx.$

Решение. Для вычисления интеграла применим подстановку

$\sqrt{1+2x} = t$. Тогда $1+2x = t^2$, $2xdx = 2tdt$, $xdx = tdt$ и

$$\int \sqrt{1+2x}dx = \int t \cdot tdt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\left(\sqrt{1+2x}\right)^3}{3} + C.$$

301. $\int \frac{2x^2 dx}{8x^3 - 5}$.

Решение. Пусть $8x^3 - 5 = t$, тогда $24x^2 dx = dt$; $2x^2 dx = \frac{1}{12} dt$.

Имеем

$$\int \frac{2x^2 dx}{8x^3 - 5} = \frac{1}{12} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{12} ln|t| + C = \frac{1}{12} ln\left|8x^3 - 5\right| + C.$$

302. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^6}$.

Решение. При вычислении некоторых интегралов удобно использовать процедуру внесения подынтегральной функции (или ее части) под знак дифференциала. Так, $x^2 dx = \frac{1}{3} d\left(x^3\right)$ и

$$\int \frac{x^2 dx}{1+x^6} = \frac{1}{3} \int \frac{d\left(x^3\right)}{1+\left(x^3\right)^2} = \frac{1}{3} arctgx^3 + C.$$

303. $\int \frac{2xdx}{x^2 + 5}$.

Решение.

$$\int \frac{2xdx}{x^2+5} = \int \frac{d\left(x^2+5\right)}{x^2+5} = ln\left(x^2+5\right) + C.$$

304. $\int x^2 e^{x^3} dx$.

Решение.

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} d\left(x^3\right) = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

305. $\int \frac{\sqrt{arctgx}}{x^2 + 1} dx$.

Решение.
$$\int \frac{\sqrt{arctgx}}{x^2+1}dx = \int (arctgx)^{1/2} d(arctgx) = \frac{2}{3}\sqrt{arctgx}\,arctgx + C.$$

306. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$.

Решение. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx =$
$$\int \left(e^x+1\right)^{1/2} d\left(e^x+1\right) = \frac{2}{3}\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+1} + C.$$

307. $\int sin^5 x\cos x dx$.

Решение. $\int sin^5 x\cos x dx = \int sin^5 x d(\sin x) = \frac{1}{6}sin^6 x + C.$

308. $\int \frac{6xdx}{\sqrt{x^4-5}}$.

Решение. Внесем $2x$ под знак дифференциала и применим формулу (XII).
$$\int \frac{6xdx}{\sqrt{x^4-5}} = 3\int \frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{\left(x^2\right)^2-5}} = 3ln\left(x^2+\sqrt{x^4-5}\right) + C.$$

В задачах **309 – 324** вычислить интегралы:

309. $\int \left(x+\frac{1}{x^2}-\sqrt{x}\right)dx$.

310. $\int \frac{5x^3-x^2-1}{x^4}dx$.

311. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}}-\sin x\right)dx$.

312. $\int \left(3^x-\frac{5}{16+x^2}\right)dx$.

313. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{cos^2 x}\right)dx$.

314. $\int \frac{1-sin^3 x}{sin^2 x}dx$.

315. $\int \frac{2\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

316. $\int 6x\sin\left(x^2+3\right)dx$.

317. $\int \frac{\sin 2x dx}{(1+\cos 2x)^2}$.

318. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$.

319. $\int \frac{dx}{cos^2 x\sqrt{25 - tg^2 x}}$.

320. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 9}$.

321. $\int \frac{3x^2 dx}{x^6 - 25}$.

322. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$.

323. $\int \frac{cos\, xdx}{\sqrt{sin^2 x + 3}}$.

324. $\int \frac{sin\, 2xdx}{3 + sin^2 x}$.

5. 2. Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые по x функции. Тогда

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du, \quad u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, имеем

$$\int \boldsymbol{u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du} \qquad (1)$$

Формулу (1) называют *формулой интегрирования по частям.*

При применении этой формулы следует пользоваться следующими рекомендациями.

1. Если подынтегральная функция есть произведение многочлена степени n на показательную или тригонометрическую функцию, то за множитель u следует принять многочлен и применить формулу интегрирования по частям n раз.

2. Если подынтегральная функция является произведением многочлена на логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию, то за множитель u нужно принять логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию.

3. Если подынтегральная функция есть произведение показательной и тригонометрической функции ($sinkx$, $coskx$), то формулу (1) нужно применять дважды, что приведет к уравнению относительно искомого интеграла.

В задачах **325 – 343** вычислить интегралы.

325. $\int \left(x^2 + 5x + 8\right) e^x dx$.

Решение. По рекомендации 1 дважды применяем формулу (1) интегрирования по частям.

Полагаем $u = x^2 + 5x + 8$ и $dv = e^x dx$. Тогда $du = (2x + 5)dx$ и

$v = \int e^x dx = e^x$. По формуле (1) имеем:

$$\int \left(x^2 + 5x + 8\right) e^x dx = \left(x^2 + 5x + 8\right) e^x - \int (2x + 5) e^x dx.$$

Для интеграла $\int (2x+5) e^x dx$, применяя формулу (1), получаем

$$\int (2x + 5) e^x dx = (2x + 5)\, e^x - \int 2e^x dx = (2x + 5)\, e^x - 2e^x + C.$$

Тогда

$$\int \left(x^2 + 5x + 8\right) e^x dx = \left(x^2 + 5x + 8\right) e^x - (2x + 5)\, e^x + 2e^x + C =$$

$$= \left(x^2 + 3x + 5\right) e^x + C.$$

326. $\int \left(x^2 - 3x + 4\right) e^x dx$.

327. $\int x^2 \sin 3x dx$.

328. $\int x^2 \cos x dx$.

329. $\int \left(x^2 - 2x + 5\right) e^{-x} dx$.

330. $\int x \sin x dx$.

Решение. Исходя из рекомендации 1, имеем:

$u = x$; $dv = \sin x dx$; отсюда $du = dx$; $v = \int \sin x dx = -\cos x$.

По формуле (1) получаем:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = \sin x - x \cos x + C.$$

331. $\int \ln x dx$.

Решение. По рекомендации 2 имеем:

$u = \ln x$; $dv = dx$, тогда $du = \dfrac{dx}{x}$ и $v = x$. По формуле (1) получаем:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

332. $\int x^3 \ln x dx$.

Решение. Используем рекомендацию 2:

$u = \ln x$; $dv = x^3 dx$. Отсюда $du = \dfrac{dx}{x}$; $v = \int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4}$. По формуле (1) имеем:

$\int x^3 \ln x dx =$

$$\frac{1}{4}x^4 \ln x - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C = \frac{1}{16}x^4 (4 \ln x - 1) + C .$$

333. $\int \arccos x dx$.

Решение. По рекомендации 2 имеем:

$$u = \ln x \ ; dv = dx \text{. Тогда } du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \ ; v = x .$$

По формуле интегрирования по частям получаем:

$$\int \arccos x dx = x \arccos x + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arccos x - \frac{1}{2}\int \left(1-x^2\right)^{-1/2} d\left(1-x^2\right)$$

=

$$= x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = x arccocx - \sqrt{1-x^2} + C.$$

334. $\int e^x \cos x dx$.

Решение. Используем рекомендацию 3, по которой для вычисления данного интеграла дважды применим формулу интегрирования по частям.

Пусть $u = e^x \ ; dv = \cos x dx$.Тогда $du = e^x dx \ ; v = \int \cos x dx = \sin x.$

По формуле (1) имеем: $I = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$

Для вычисления последнего интеграла обозначим

$u = e^x \ ; dv = \sin x dx.$

Тогда $du = e^x dx \ ; v = \int \sin x dx = -\cos x$.

Получаем

$$I = e^x \sin x - \left(- e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right) = e^x \sin x + e^x \cos x - I \ .$$

Рассматривая последнее равенство как уравнение относительно искомого интеграла I , получаем

$$I = \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x + \cos x\right) + C.$$

335. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{\left(x^2+1\right)^n}dx = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} - \int x \cdot \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^n}$.

Последний интеграл $\int x \cdot \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^n}$ вычислим с помощью формулы интегрирования по частям. Положим $u = x$, а $dv = \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^n}$. Тогда $du = dx$,

а $v = \int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^n} = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^{-n} d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x^2+1\right)^{-n+1}}{-n+1} =$

$= -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}$. Получаем

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{2n-2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}}. \qquad (2)$$

Формула (2) называется *рекуррентной.* Она позволяет интеграл $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$ выразить через интеграл $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}$, то есть понизить на единицу степень знаменателя подынтегрального выражения. Последовательно применяя эту формулу $(n-1)$ раз, данный интеграл сводится к табличному интегралу (X).

336. $\int \frac{dx}{\left(x^2+25\right)^3}$.

Решение. Применим формулу (2).

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+25\right)^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{\left(x^2+25\right)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x^2+25\right)^2}.$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{\left(x^2+25\right)^2}$ вновь применяем формулу (2).

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+25\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+25} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+25} = \frac{x}{2\left(x^2+25\right)} + \frac{1}{10} arctg \frac{x}{5}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+25\right)^3} = \frac{x}{4\left(x^2+25\right)^2} + \frac{3x}{8\left(x^2+25\right)} + \frac{3}{40} arctg \frac{x}{5} + C.$$

337. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Решение. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Первый интеграл является табличным (XII), второй вычислим по формуле (1) интегрирования по частям.

$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$. Положим здесь $u = x,\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$, тогда

$du = dx$ и $v = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} xdx = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1+x^2\right) =$

$= \sqrt{1+x^2}$, следовательно,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Имеем $\int \sqrt{1+x^2}\,dx = ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx + 2C$,

откуда $\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + x\sqrt{1+x^2}\right] + C$.

338. $\int arcsin\, xdx$.

339. $\int xe^{-x}dx$.

340. $\int arctgxdx$.

341. $\int x3^x dx$.

342. $\int x\cos 3xdx$.

343. $\int e^x \sin xdx$.

5. 3. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен

1. Рассмотрим *интегралы вида* $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$.

Выделением в квадратном трехчлене $ax^2 + bx + c$ полного квадрата при дискриминанте $D = b^2 - 4ac > 0$ интегралы сводятся к табличному интегралу (XI); при $D = 0$ – к интегралу (I); при $D < 0$ – к интегралу (X).

344. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4}$.

Решение. Преобразуем знаменатель дроби и применением формулу (1).

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2} = \int (x+2)^{-2} dx = -\frac{1}{x+2} + C.$$

345. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{3x^2 + 4x - 7}$.

Решение. Выделяем в знаменателе дроби полный квадрат и применяем формулу (XI).

$$\int \frac{dx}{3x^2 + 4x - 7} = \int \frac{3dx}{9x^2 + 12x - 21} = \int \frac{3dx}{9x^2 + 12x + 4 - 25} =$$

$$= \int \frac{d(3x+2)}{(3x+2)^2 - 5^2} = \frac{1}{10} ln\left|\frac{3x+2-5}{3x+2+5}\right| + C = \frac{1}{10} ln\left|\frac{3x-3}{3x+7}\right| + C.$$

В задачах **346 – 351** вычислить неопределенные интегралы.

346. $\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 25}$.

347. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$.

348. $\int \frac{dx}{9x^2 - 6x - 8}$.

349. $\int \frac{dx}{3x^2 - 7x + 2}$.

350. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2}$.

351. $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$.

2. *Интегралы вида* $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$.

Если выражение $Mx+N$ является производной квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то подстановкой $ax^2+bx+c=t$ интеграл сводится к табличному (II). Если же $(ax^2+bx+c)' \neq Mx+N$, то в числителе подынтегральной дроби нужно выделить производную ее знаменателя, тем самым данный интеграл сводится к двум интегралам, один из которых вычисляется по формуле (II), а другой – по формулам (X) либо (XI).

352. Вычислить интеграл $\int \frac{x+3}{2x^2-5x+1}dx$.

Решение. Выделим в числителе дроби производную ее знаменателя, то есть выражение $4x-5$ и преобразуем дробь:

$$\int \frac{x+3}{2x^2-5x+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x-5+17}{2x^2-5x+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+1}dx + \frac{17}{4}\int \frac{dx}{2x^2-5x+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d\left(2x^2-5x+1\right)}{2x^2-5x+1} + \frac{17}{8}\int \frac{dx}{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}ln\left|2x^2-5x+1\right| +$$

$$+\frac{17}{8}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{17}{16}} = \frac{1}{4}ln\left|2x^2-5x+1\right| + \frac{17}{8}\cdot\frac{2}{\sqrt{17}}ln\left|\frac{x-\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}}{x-\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}ln\left|2x^2-5x+1\right| + \frac{\sqrt{17}}{4}ln\left|\frac{4x-5-\sqrt{17}}{4x-5+\sqrt{17}}\right| + C.$$

В задачах **353 – 356** вычислить неопределенные интегралы.

353. $\int \frac{x-1}{x^2+6x+25}dx$.

354. $\int \frac{3x-1}{2x^2-4x+3}dx$.

355. $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx$.

356. $\int \frac{2x+3}{2x^2+x+1}dx$.

3. *Интегралы вида* $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Если числитель подынтегральной дроби совпадает с производной квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то интеграл вычисляется применением формул (IX) или (XII). Если же $\left(ax^2+bx+c\right)' \neq Mx+N$, то выделением в числителе дроби производной подкоренного трехчлена интеграл сводится к вычислению двух интегралов применением формул (I), (IX) или (XII).

357. Вычислить интеграл $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$.

Решение. Выделим в числителе дроби производную трехчлена $1-x-x^2$, то есть $-1-2x$, преобразуем подынтегральную дробь:

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx = -\int \frac{-2x-1+9}{\sqrt{1-x-x^2}}dx = -\int \frac{-2x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx - 9\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} =$$

$$= -\int \left(1-x-x^2\right)^{1/2} d\left(1-x-x^2\right) - 9\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = -2\sqrt{1-x-x^2} -$$

$$-9\arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + \mathrm{C} = -2\sqrt{1-x-x^2} - 9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + \mathrm{C}.$$

В задачах **358 – 363** вычислить интегралы.

358. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$.

359. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

360. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx$.

361. $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$.

362. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx$.

363. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-6x+1}}dx$.

4. *Интегралы вида* $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ подстановкой $x-\alpha=\frac{1}{z}$ сводятся к интегралу типа $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

364. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$.

Решение. Полагаем $x=\frac{1}{z}$. Тогда $dx=-\frac{dz}{z^2}$ и $2x^2+2x+1=$

$$= \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z} + 1 = \frac{2 + 2z + z^2}{z^2}\ ; \ \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \frac{\sqrt{2 + 2z + z^2}}{z}.$$

Тогда $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = -\int \frac{z \cdot zdz}{z^2\sqrt{z^2 + 2z + 2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{(z+1)^2 + 1}} =$

$$= -ln\left|z + 1 + \sqrt{z^2 + 2z + 2}\right| + C = -ln\left|\frac{1}{x} + 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 2}\right| + C =$$

$$= -ln\left|\frac{1}{x} + 1 + \frac{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}{x}\right| + C = ln\left|\frac{x}{1 + x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}}\right| + C.$$

365. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 3x + 3}}$.

Решение. Преобразуем числитель подынтегральной дроби, представим интеграл в виде разности двух интегралов.

$$\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 3x + 3}} = \int \frac{3(x+1) - 1}{(x+1)\sqrt{x^2 + 3x + 3}}dx = 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}} -$$

$$- \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 3x + 3}}.$$

Первый интеграл вычисляем по формуле (XII), для вычисления второго интеграла применяем подстановку $x + 1 = \frac{1}{z}$. Тогда

$$\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 3x + 3}} = 3ln\left|x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 3}\right| +$$

$$+\int \frac{\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z}\sqrt{\left(\frac{1}{z} - 1\right)^2 + 3\left(\frac{1}{z} - 1\right) + 3}} = 3ln\left|x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 3}\right| + \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + z + 1}} =$$

$$= 3ln\left|x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 3}\right| + ln\left|z + \frac{1}{2} + \sqrt{z^2 + z + 1}\right| + \mathrm{C} =$$

$$= 3ln\left|x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 3}\right| + ln\left|\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}{x+1}\right| + \mathrm{C}.$$

В задачах **366 – 369** вычислить интегралы.

366. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **367.** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

368. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$. **369.** $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{4x-x^2-3}}$.

5. *Интегралы вида* $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx$.

Для вычисления интегралов этого вида для случая, когда дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, применяют *рекуррентную формулу* (3), являющуюся обобщением формулы (2):

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{a^2(2k-2)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{a^2(2k-2)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}. \qquad (3)$$

370. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} = \int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}, \text{ где } t = x-2.$$

Для вычисления последнего интеграла в формуле (3) положим $к$=2. Имеем

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}arctgt + C.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{x-2}{2(x^2-4x+5)} + \frac{1}{2}arctg(x-2) + C.$$

371. Вычислить интеграл $\int \frac{2x-2}{(x^2-4x+5)^2}dx$.

Решение. $\int \frac{2x-2}{(x^2-4x+5)^2}dx = \int \frac{2x-4+2}{(x^2-4x+5)^2}dx =$

$$= \int \frac{(2x-4)dx}{\left(x^2-4x+5\right)^2} + 2\int \frac{dx}{\left(x^2-4x+5\right)^2} = \int \left(x^2-4x+5\right)^{-2} d\left(x^2-4x+5\right) +$$

$$+ 2\int \frac{d(x-2)}{\left[(x-2)^2+1\right]^2} = -\frac{1}{x^2-4x+5} + 2\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}, \text{ где } t = x-2.$$

Положив $n = 2$ в рекуррентной формуле (3), вычисляем

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2} arctgt + C.$$

Тогда

$$\int \frac{2x-2}{\left(x^2-4x+5\right)^2} dx = -\frac{1}{x^2-4x+5} + \frac{x-2}{x^2-4x+5} + arctg(x-2) + C =$$

$$= \frac{x-3}{x^2-4x+5} + arctg(x-2) + C.$$

5. 4. Интегрирование дробной рациональной функции

Рациональной дробью $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется частное двух многочленов.

Если степень многочлена $P(x)$ больше или равна степени многочлена $Q(x)$, то дробь называется *неправильной*; в противном случае дробь называется *правильной.*

При интегрировании *неправильной* рациональной дроби нужно разделить ее числитель $P(x)$ на знаменатель $Q(x)$, тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $S(x)$ –частное, $R(x)$ – остаток деления.

Тогда

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

Для интегрирования правильной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ нужно записать ее в виде суммы *элементарных дробей* исходя из разложения знаменателя $Q(x)$ на произведение линейных и квадратичных множителей.

Пусть $Q(x)$ имеет следующее разложение на множители:

$$Q(x) = A(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2},$$

где сумма $k_1 + k_2 + \ldots + l_1 + l_2$ равна степени многочлена $Q(x)$.

Тогда правильная рациональная дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$ представима в виде следующей суммы элементарных дробей:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-a)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-b)^{k_2}}+\ldots+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{C_{l_1}x+D_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}.$$

Для определения коэффициентов $A_1,\ldots,A_{k_1},B_1,\ldots,B_{k_2},C_1,\ldots,C_{l_1},D_1,\ldots,D_{l_1}$ нужно привести к наименьшему общему знаменателю правую часть последнего равенства и приравнять полученный в числителе дроби многочлен многочлену $R(x)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов, получим систему линейных уравнений, которую нужно решить.

372. Вычислить интеграл $\int\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$.

Решение. Подынтегральную правильную рациональную дробь представим в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}=$$

$$=\frac{A(x+2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)}.$$

Для определения коэффициентов A, B, C приравняем числители первой и последней дробей и в полученное равенство поставим поэтапно $x=-1;\quad x=-2;\quad x=3$.

$$A(x+2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x+2)=x.$$

При $x=-1$ получаем $-4A=-1$, откуда $A=\frac{1}{4}$;

$x=-2$; $\qquad 5B=-2$; $\qquad B=-\frac{2}{5}$;

$x=3$; $\qquad 20C=3$; $\qquad C=\frac{3}{20}$.

Тогда $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}=\frac{1}{4(x+1)}-\frac{2}{5(x+2)}+\frac{3}{20(x-3)}$ и

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx = \int \left[\frac{1}{4(x+1)} - \frac{2}{5(x+2)} + \frac{3}{20(x-3)} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{4} ln|x+1| - \frac{2}{5} ln|x+2| + \frac{3}{20} ln|x-3| + C = \frac{1}{20} ln \left| \frac{(x+1)^5 (x-3)^3}{(x+2)^8} \right| + C .$$

373. Вычислить интеграл $\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx$.

Решение. Подынтегральную правильную рациональную дробь представим в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} .$$

Отсюда $A(x^2+1) + (Bx+C) = x+1$ или $(A+B)x^2 + Cx + A = x+1$. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получаем систему уравнений относительно искомых коэффициентов:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=1 \\ A=1 \end{cases} , \text{ откуда } A=1; B=-1; C=1 .$$

Тогда

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= ln|x| - \frac{1}{2} ln(x^2+1) + arctgx + C = ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + arctgx + C .$$

374. Вычислить интеграл $\int \frac{x^5 - 2x^2 + 3}{(x-2)^2} dx$.

Решение. Под знаком интеграла имеем неправильную рациональную дробь (числитель – многочлен пятой степени, знаменатель – второй). Разделив многочлен $P(x) = x^5 - 2x^2 + 3$ на $Q(x) = x^2 - 4x + 4$, в частном получим $S(x) = x^3 + 4x^2 + 12x + 30$ и в остатке $R(x) = 72x - 117$.

Тогда

$$\frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}=x^3+4x^2+12x+30+\frac{72x-117}{(x-2)^2}.$$

Правильную рациональную дробь $\frac{72x-117}{(x-2)^2}$ представим в виде следующей суммы элементарных дробей:

$$\frac{72x-117}{(x-2)^2}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}.$$

После приведения в последнем равенстве к общему знаменателю, получаем тождество

$$72x-117=A_1(x-2)+A_2;\quad 72x-117=A_1x-2A_1+A_2.$$

Имеем $\begin{cases} A_1=72 \\ -2A_1+A_2=-117 \end{cases}$, отсюда $A_1=72$, $A_2=27$.

Следовательно,

$$\frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}=x^3+4x^2+12x+30+\frac{72}{x-2}+\frac{27}{(x-2)^2}\quad \text{и}$$

$$\int\frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}dx=\int\left[x^3+4x^2+12x+30+\frac{72}{x-2}+27(x-2)^{-2}\right]dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+6x^2+30x+72\ln|x-2|-\frac{27}{x-2}+C.$$

375. Вычислить интеграл $\int\frac{x^3+1}{x^5+2x^3+x}dx$.

Решение. Знаменатель подынтегральной дроби разложим на произведение линейных и квадратичных множителей и представим дробь в виде суммы элементарных дробей.

$$\frac{x^3+1}{x^5+2x^3+x}=\frac{x^3+1}{x\left(x^4+2x^2+1\right)}=\frac{x^3+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Для нахождения коэффициентов $A; B; C; D; E$ преобразуем последнее равенство (приведем элементарные дроби к общему знаменателю):

$$\frac{x^3+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A\left(x^2+1\right)^2+(Bx+C)x\left(x^2+1\right)+(Dx+E)x}{x\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$= \frac{(A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A}{x\left(x^2+1\right)^2}.$$

Отсюда

$$x^3+1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого равенства, получаем следующую систему уравнений относительно искомых коэффициентов:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=1 \\ 2A+B+D=0. \\ C+E=0 \\ A=1 \end{cases}$$

Решением системы являются $A=1; B=-1; C=1; D=-1; E=-1$.

Следовательно,

$$\frac{x^3+1}{x\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1} + \frac{-x-1}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Тогда

$$\int \frac{x^3+1}{x^5+2x^3+x}dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1} + \frac{-x-1}{\left(x^2+1\right)^2}\right]dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2} - \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= ln|x| - \frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right) + arctgx + \frac{1}{2\left(x^2+1\right)} - \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Последний интеграл вычислим по рекуррентной формуле (2) при $к = 2$.

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}arctgx + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^3+1}{x^5+2x^3+x}dx = ln|x| - \frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right) + arctgx + \frac{1}{2\left(x^2+1\right)} - \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} -$$

$$-\frac{1}{2}arctgx + C = ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}arctgx + \frac{1-x}{2\left(x^2+1\right)} + C.$$

В задачах **376 – 385** вычислить неопределенные интегралы.

376. $\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$. **377.** $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

378. $\int\frac{x^4}{\left(x^2-1\right)(x+2)}dx$. **379.** $\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}dx$.

380. $\int\frac{2x+3}{(x-2)^3}dx$. **381.** $\int\frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}dx$.

382. $\int\frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}dx$. **383.** $\int\frac{5x^2+6x+9}{(x+1)^2(x-3)^2}dx$.

384. $\int\frac{7x^2-1}{x^4+4x^2-5}dx$. **385.** $\int\frac{x^3+1}{\left(x^2-4x+5\right)^2}dx$.

5. 5. Интегрирование рациональных тригонометрических функций

Для вычисления интегралов вида $\int R(sin\,x, cos\,x)dx$, где $R(sin\,x, cos\,x)$ − функция, рациональная относительно *sinx* и *cosx*, следует использовать следующие рекомендации.

1. Для вычисления интегралов вида $\int sin^m x\,cos^n x dx$, где m и n – натуральные числа, при m – положительном нечетном используется подстановка $cos\,x = t$; если n – нечетное положительное – подстановка $sin\,x = t$.

Если показатели степеней m и n – четные, то следует понизить степень тригонометрических функций, используя соответствующие формулы тригонометрии.

Если хотя бы один из четных показателей m или n отрицателен, то применяют подстановки $tgx = t$ или $ctgx = t$.

2. При вычислении интегралов вида $\int sin\,ax \cdot sin\,bxdx$,

$\int cos\, ax \cdot cos\, bxdx$, $\int sin\, ax \cdot cos\, bxdx$ следует произведение тригонометрических функций преобразовать в их сумму.

3. Часто к интегралу от рациональной функции приводит подстановка $tg\frac{x}{2} = t$. В этом случае $sin\, x = \frac{2t}{1+t^2}$, $cos\, x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

386. Вычислить интеграл $\int sin^2 x\, cos^3 xdx$.

Решение. В нашем случае $n = 3$ – нечетное число, применяем подстановку $sin\, x = t$, отсюда $cos\, xdx = dt$.

Тогда

$$\int sin^2 x\, cos^3 xdx = \int sin^2 x\, cos^2 x\, cos\, xdx = \int sin^2 x(1 - sin^2 x)\, cos\, xdx =$$

$$= \int t^2\left(1 - t^2\right)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}sin^3 x - \frac{1}{5}sin^5 x + C.$$

387. Вычислить интеграл $\int sin^5 xdx$.

Решение. Используем рекомендацию 1.

$$\int sin^5 xdx = \int sin^4 x \cdot sin\, xdx = \int \left(1 - cos^2 x\right)^2 sin\, xdx =$$

$$= \left|cos\, x = t; - sin\, xdx = dt\right| = -\int \left(1 - t^2\right)^2 dt = \int \left(2t^2 - t^4 - 1\right)dt =$$

$$= \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} - t + C = \frac{2cos^3 x}{3} - \frac{cos^5 x}{5} - cos\, x + C.$$

388. Вычислить интеграл $\int \frac{cos^3 x}{sin^4 x}dx$.

Решение. $\int \frac{cos^3 x}{sin^4 x}dx = \int \frac{cos^2 x \cdot cos\, x}{sin^4 x}dx = \int \frac{\left(1 - sin^2 x\right)\cdot cos\, x}{sin^4 x}dx =$

= / применим подстановку $sin\, x = t$, тогда $cos\, xdx = dt$ / =

$$= \int \frac{1-t^2}{t^4}dt = \int \left(t^{-4} - t^{-2}\right) dt = \frac{t^{-3}}{-3} - \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{sin\, x} - \frac{1}{3sin^3 x} + C.$$

389. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{sin^2 x\, cos^4 x}$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение, применив формулы $sin 2\alpha = 2 sin\alpha cos\alpha$, $sin 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$, сделаем подстановку $tgx = t$.

$$\int \frac{dx}{sin^2 x cos^4 x} = \int \frac{dx}{sin^2 x cos^2 x cos^2 x} = 4\int \frac{dx}{sin^2 2x cos^2 x} =$$

$$= 4\int \frac{dx}{\left(\frac{2tgx}{1+tg^2 x}\right)^2 cos^2 x} = 4\int \frac{dt}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} = \int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t^2} + 2 + t^2\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{t} + 2t + \frac{t^3}{3} + C = 2tgx - ctgx + \frac{1}{3} tg^3 x + C.$$

В задачах **390 – 397** вычислить интегралы.

390. $\int cos^3 x dx$. **391.** $\int sin^3 x cos^2 x dx$.

392. $\int \frac{sin^3 x}{cos^6 x} dx.$ **393.** $\int \frac{cos^5 x}{sin^2 x} dx.$

394. $\int sin^4 x cos^2 x dx$. **395.** $\int cos^2 x dx$.

396. $\int sin^2 x cos^4 x dx$. **397.** $\int sin^4 x cos^4 x dx$.

398. Вычислить интеграл $\int sin 5x \cdot cos 3x dx$.

Решение. По рекомендации 2 применим формулу

$$sin\alpha \, cos\beta = \frac{1}{2}\left[sin(\alpha - \beta) + sin(\alpha + \beta)\right].$$

Тогда

$$\int sin 5x \cdot cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (sin 2x + sin 8x) dx = -\frac{1}{4} cos 2x - \frac{1}{16} cos 8x + C.$$

399. Вычислить интеграл $\int cos 4x \cdot cos 5x dx$.

Решение. Используем формулу

$$cos\alpha \, cos\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)\right].$$

Тогда

$$\int cos 4x \cdot cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (cos 9x + cos x) dx = \frac{1}{18} sin 9x + \frac{1}{2} sin x + C.$$

В задачах **400 – 402** вычислить интегралы.

400. $\int \sin x \cdot \cos 4x dx$. **401.** $\int \cos 3x \cdot \cos^2 x dx$.

402. $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x dx$.

403. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 3}$.

Решение. Делаем подстановку $tg\frac{x}{2} = t$, тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ и

$$\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 1} =$$

$$= arctg(t+1) + C = arctg\left(tg\frac{x}{2} + 1\right) + C.$$

В задачах **404 – 407** вычислить интегралы.

404. $\int \frac{dx}{4 - 5\sin x}$. **405.** $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$.

406. $\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}$. **407.** $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$.

5. 6. Интегрирование иррациональных выражений

1. *Интегралы вида* $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ вычисляются подстановкой $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$.

408. Вычислить интеграл $\int x^3\sqrt{9 - x^2}dx$.

Решение. Пусть $x = 3\sin t$, тогда $dx = 3\cos t dt$ и

$$\int x^3\sqrt{9-x^2}dx = \int 27\sin^3 t\sqrt{9 - 9\sin^2 t} \cdot 3\cos t dt = 243\int \sin^3 t\cos^2 t dt =$$

$$= 243\int \sin^2 t\cos^2 t\sin t dt = 243\int (1 - \cos^2 t)\cos^2 t\sin t dt =$$

$$=-243\int\left(cos^2 t-cos^4 t\right)d\left(cos\,t\right)=\frac{243}{5}cos^5 t-81cos^3 t+C.$$

Полученный результат выразим через заданную переменную x:

$$sin\,t=\frac{x}{3},\;\; cos\,t=\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}.$$

Тогда

$$\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{243}{5}\cdot\frac{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^5}{243}-81\cdot\frac{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3}{27}+C=$$

$$=\frac{1}{5}(9-x^2)^2\sqrt{9-x^2}-3(9-x^2)\sqrt{9-x^2}+C=$$

$$=-\frac{1}{5}(9-x^2)(x^2+6)\sqrt{9-x^2}+C.$$

2. *Интегралы вида* $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$ сводятся к табличным подстановкой $x=atgt$ или $x=actgt$.

409. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\left(4+x^2\right)\sqrt{4+x^2}}$.

Решение. Применяем подстановку $x=2tgt$. Тогда $dx=\frac{2dt}{cos^2 t}$ и

$$\int\frac{dx}{\left(4+x^2\right)\sqrt{4+x^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{cos^2 t}}{\left(4+4tg^2 t\right)\sqrt{4+4tg^2}}=\frac{1}{4}\int cos\,tdt=\frac{1}{4}sin\,t+C.$$

Выразим $sin\,t$ через x.

$$sin\,t=tgt\cdot cos\,t=\frac{tgt}{sec\,t}=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}}=\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{\left(4+x^2\right)\sqrt{4+x^2}}=\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+C.$$

3. *Интегралы вида* $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ сводятся к табличным подстановкой $x = \dfrac{a}{\cos t}$ или $x = \dfrac{a}{\sin t}$.

410. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$.

Решение. Применяем подстановку $x = \dfrac{3}{\cos t}$. Тогда $dx = \dfrac{3\sin t}{\cos^2 t}dt$ и

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}}{\frac{3}{\cos t}} \cdot \frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt = 3\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt = 3\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= 3\int \frac{dt}{\cos^2 t} - 3\int dt = 3tgt - 3t + C.$$

В полученном выражении перейдем к переменной x:

$$\cos t = \frac{3}{x}; \quad t = \arccos\frac{3}{x}; \quad tgt = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{9} - 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{x} + C.$$

В задачах **411 – 416** вычислить интегралы.

411. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

412. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

413. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$.

414. $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

415. $\displaystyle\int \frac{dx}{(16+x^2)\sqrt{9-x^2}}$.

416. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

4. Если подынтегральная функция содержит дробные степени аргумента x, то подстановкой $x = t^m$, где m – наименьшее общее кратное показателей корней, она сводится к рациональному относительно t выражению.

417. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

Решение. Наименьшее общее кратное показателей корней равно 6. Положим $x = t^6$, тогда $dx = 6t^5 dt$. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^2+t^3} = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}dt = 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - ln|t+1|\right) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\,ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right) + C.$$

Для случая, когда подынтегральная функция содержит дробные степени двучлена $ax + b$, применяется подстановка $ax + b = t^m$, где m – наименьшее общее кратное показателей радикалов подынтегральной функции.

418. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$.

Решение. Положим $2x - 1 = t^4$, тогда $2dx = 4t^3 dt$, $dx = 2t^3 dt$. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{2t^3}{t^2 - t}dt = 2\int \frac{t^2}{t-1}dt = 2\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 2\int\left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} + t + ln|t-1|\right) + C = t^2 + 2t + 2ln|t-1| + C =$$

$$= \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + 2ln\left|\sqrt[4]{2x-1} - 1\right| + C$$

В задачах **419 – 422** вычислить интегралы.

419. $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2}}$. **420.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$.

421. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}}$. **422.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}}$.

5. *Интегрирование дифференциальных биномов*

Дифференциальным биномом называется выражение

$x^m\left(a+bx^n\right)^p$, где m, n, p – рациональные числа.

Великий русский математик П.Л.Чебышев доказал возможность вычисления интегралов вида $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ через элементарные функции в следующих случаях:

1) если p – целое число;

2) если $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число. В этом случае применяется подстановка $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби p;

3) если $\dfrac{m+1}{n}+p$ – целое число. В этом случае используется подстановка $a+bx^n=t^s x^n$.

423. Вычислить интеграл $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$.

Здесь $m=-\dfrac{1}{2},\;\; n=\dfrac{1}{4},\;\; p=\dfrac{1}{3},\;\; \dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$.

Имеем случай 2) интегрируемости, применим подстановку $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$. Отсюда $x=\left(t^3-1\right)^4$, $dx=12t^2\left(t^3-1\right)^3dt$.

Тогда

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=12\int\frac{t^3\left(t^3-1\right)^3}{\left(t^3-1\right)^2}dt=12\int\left(t^6-t^3\right)dt=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C=$$

$$=\frac{12}{7}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}+C.$$

424. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$. Здесь $m=-4$; $n=2$; $p=-\frac{1}{2}$. Тогда $\frac{m+1}{n}=\frac{-4+1}{2}=-\frac{3}{2}$ не является целым числом ; $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$ есть целое число (имеет место третий случай).

Применяем подстановку $1+x^2=t^2x^2$. Отсюда $x=\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}$; $dx=-\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}tdt$.

Имеем

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx = -\int \left(t^2-1\right)^2 t^{-1}\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}tdt =$$

$$= -\int \left(t^2-1\right)dt = t-\frac{t^3}{3}+C = t\left(1-\frac{t^2}{3}\right)+C.$$

В полученном выражении перейдем к переменной x. Из используемой подстановки имеем: $t^2=\frac{1+x^2}{x^2}$; $t=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\left(1-\frac{1+x^2}{3x^2}\right)+C = \frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$$

В задачах **425 – 431** вычислить интегралы.

425. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

426. $\int \left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{4}}dx$.

427. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

428. $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$.

429. $\int \left(1+\sqrt{x}\right)^{3/4}dx$.

430. $\int x^5\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

431. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

ГЛАВА 6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6. 1. Понятие и свойства определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a; b]. Произвольным образом разобьем этот отрезок точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ на n отрезков (*элементарных отрезков*), длину каждого из которых обозначим через $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, то есть $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где i=1, 2, …, n; $x_0 = a$, $x_n = b$.

Произвольно выберем точки $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$

которую назовем *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке [a; b]. Обозначим длину наибольшего из элементарных отрезков Δx_i через $max\,\Delta x_i$.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке [a; b] называется конечный предел при $max\Delta x_i \to 0$ интегральной суммы, не зависящий ни от способа разбиения отрезка [a; b], ни от выбора точек c_i и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$.

Следовательно, по определению имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i .$$

Здесь числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним* пределами интегрирования; [a; b] – отрезком интегрирования; $f(x)$ - подынтегральной функцией; $f(x)dx$ - подынтегральным выражением; x – переменной интегрирования.

Если для функции $y = f(x)$ существует определенный интеграл , она называется *интегрируемой* на отрезке [a; b].

Свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, то есть $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

2. Определенный интеграл от суммы конечного числа функций ра-

вен сумме определенных интегралов от слагаемых функций, то есть

$$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, то есть $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$.

4. При перестановке пределов интегрирования меняется лишь знак определенного интеграла, то есть $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

5. Если отрезок интегрирования $[a; b]$ точкой c разбит на два отрезка $[a; c]$ и $[c; b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

6. Определенный интеграл равен произведению длины отрезка интегрирования на значение подынтегральной функции в некоторой точке этого отрезка, то есть $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$, где $c \in [a;b]$.

Свойство 6 называют *теоремой о среднем значении функции*.

Связь между определенным и неопределенным интегралами устанавливается *формулой Ньютона – Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (6.\ 1)$$

При вычислении определенных интегралов удобно использовать следующие их свойства:

1) определенный интеграл с противоположными пределами интегрирования от нечетной непрерывной функции равен нулю, то есть если $f(x)$ - нечетная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

2) определенный интеграл с противоположными пределами интегрирования от четной непрерывной функции равен удвоенному интегралу от этой функции на правой половине отрезка интегрирования, то есть

если $f(x)$- четная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx .$$

432. Вычислить интеграл $\int_{3}^{6} x^2 dx$.

Решение. По формуле (6. 1) имеем:

$$\int_{3}^{6} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_3^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3} = 45 .$$

433. Вычислить интеграл $\int_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. $\int_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\,x\Big|_0^{0,5} = arcsin\,0,5 - arcsin\,0 = \frac{\pi}{6}$.

434. Вычислить интеграл $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение.

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+2)^2+1} = arctg(x+2)\Big|_{-2}^{-1} = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4}$$

.

435. Вычислить интеграл $\int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{cos^2 2x}$.

Решение. $\int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{cos^2 2x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{d2x}{cos^2 2x} = \frac{1}{2}\left[tg2x\right]_{\pi/8}^{\pi/6} =$

$$= \frac{1}{2}\left(tg\frac{\pi}{3} - tg\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

436. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1}\left(x\cos x - \sqrt[3]{x} + 3x^2\right)dx$.

Решение. Функции $x\cos x-\sqrt[3]{x}$ – нечетная, $3x^2$ – четная, поэтому

$$\int_{-1}^{1}\left(x\cos x-\sqrt{x}+3x^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x\cos x-\sqrt[3]{x}\right)dx+3\int_{-1}^{1}x^2dx=0+6\int_{0}^{1}x^2dx=$$

$$=\left[2x^3\right]_0^1=2.$$

6. 2. Замена переменной и интегрирование по частям

Метод замены переменной (*метод подстановки*) в определенном интеграле базируется на следующей теореме.

Теорема. *Пусть дан интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *от непрерывной на отрезке* $[a;\, b]$ *функции* $f(x)$. *Пусть функция* $x=\varphi(t)$ *удовлетворяет следующим условиям:* 1) *функции* $\varphi(t)$, $f[\varphi(t)]$, $\varphi'(t)$ *непрерывны на отрезке* $[\alpha;\beta]$; 2) $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$. *Тогда* $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$. (6.2)

Часто при применении формулы (6. 2), позволяющей в определенном интеграле переходить к новой переменной, вместо подстановки $x=\varphi(t)$ применяют подстановку $t=g(x)$. В этом случае пределы изменения переменной t находят в виде $\alpha=g(a)$, $\beta=g(b)$.

Для определенного интеграла справедлива следующая *формула интегрирования по частям*:

$$\boldsymbol{\int_a^b u\cdot dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b v\cdot du}. \qquad (6.3)$$

437. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2}\sin x\cos^2 xdx$.

Решение. Делаем подстановку $\cos x=t$. Тогда $-\sin xdx=dt$. Определяем пределы интегрирования по новой переменной t. При $x=0$ получаем $\alpha=t_н=\cos 0=1$; если $x=\frac{\pi}{2}$, то $\beta=t_в=0$. Тогда

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\cos^2 xdx=-\int_1^0 t^2dt=\int_0^1 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

438. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{ln5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.

Решение. Полагаем $\sqrt{e^x-1}=t$, тогда $e^x-1=t^2$ и $e^x dx=2tdt$; $e^x+3=t^2+4$; $t_н=0$; $t_в=2$.

Имеем $\int\limits_0^{ln5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = \int\limits_0^2 \frac{t\cdot 2tdt}{t^2+4} = 2\int\limits_0^2 \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt =$

$$= 2\int\limits_0^2 \left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt = 2\left[t-2arctg\frac{t}{2}\right]_0^2 = 2(2-2arctg1)=4-\pi.$$

439. Вычислить интеграл $\int\limits_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

Решение. $\int\limits_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \int\limits_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}} = \left[arcsin\frac{x-1}{3}\right]_{-0,5}^{1} =$

$$= arcsin0 - arcsin(-o,5)=\frac{\pi}{6}.$$

В задачах **440 – 446** вычислить интегралы.

440. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x}dx$.

441. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$.

442. $\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$.

443. $\int\limits_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{4x+2}}$.

444. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}dx$.

445. $\int\limits_0^{2\pi} cos5x\cdot cosxdx$.

446. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} sin^3xdx$.

447. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 xlnxdx$.

Решение. Применим формулу (6. 3) интегрирования по частям.

Положим $u=lnx$, $dv=xdx$. Тогда $du=\frac{1}{x}dx$, $v=\frac{x^2}{2}$ и

$$\int_1^2 x\,ln\,xdx=\frac{1}{2}x^2\,ln\,x\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}(4\,ln\,2-ln\,1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=2\,ln\,2-\frac{3}{4}.$$

448. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} x\cos xdx$.

Решение. Положим $u=x$; $dv=\cos xdx$. Тогда $du=dx$; $v=\sin x$. По формуле (6. 3) имеем:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos xdx = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin xdx = [x\sin x+\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}-1.$$

449. Вычислить интеграл $\int_0^{0,5} arcsin\,xdx$.

Решение. $u=arcsin\,x$; $dv=dx$; $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $v=x$.

$$\int_0^{0,5} arcsin\,xdx= x\,arcsin\,x\Big|_0^{0,5} - \int_0^{0,5}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 0{,}5\,arcsin\,0{,}5+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{0,5}\left(1-x^2\right)^{0,5}d\left(1-x^2\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{0,5}=\frac{2\pi+3\sqrt{3}-8}{24}.$$

В задачах **450 – 452** вычислить интегралы.

450. $\int_0^{e-1} ln(x+1)dx$. **451.** $\int_0^1 xe^x dx$. **452.** $\int_0^{\pi} e^x\sin xdx$.

6. 3. Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются определенные интегралы с бесконечными промежутками интегрирования или определенные интегралы от функций, имеющих бесконечный разрыв в области интегрирования.

1. *Интегралы с бесконечными промежутками интегрирования.*

По определению

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx; \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx.$$

Несобственные интегралы называются *сходящимися*, если указанные пределы существуют. В противном случае интеграл называется *расходящимся.*

2. *Интегралы от разрывных функций.*

Пусть имеем интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке a, а в остальных точках отрезка [a; b] она непрерывна, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке b, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв лишь в точке c, где $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

В случае существования пределов интеграл называется *сходящимся.* В противном случае он *расходится.*

453. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}$.

Решение.

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\bigg|_0^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(arctg\frac{b}{2}-0\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Данный интеграл сходится.

454. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$.

Решение. $\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx = -\frac{1}{3}\int\limits_0^{\infty} e^{-x^3} d\left(-x^3\right) = -\frac{1}{3}\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-x^3} d\left(-x^3\right) =$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-x^3}\right]_0^b = -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{b^3}}-1\right) = \frac{1}{3}.$$

455. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение. Область интегрирования $(-\infty;\infty)$ точкой $c=0$ разобьем на интервалы $(-\infty;0)$ и $(0;\infty)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} + \lim_{b\to\infty}\int_a^b\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \lim_{a\to-\infty} arctg(x+1)\Big|_a^0 +$$

$$+ \lim_{b\to\infty} arctg(x+1)\Big|_0^b = \lim_{a\to-\infty}\left[arctg1 - arctg(a+1)\right] + \lim_{b\to\infty}\left[arctg(b+1) - arctg1\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi.$$

456. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв при $x=1$. Тогда

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \int_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-2/3}d(x-1) + \lim_{\delta\to0}\int_{1+\delta}^2(x-1)^{-2/3}d(x-1) =$$

$$= 3\lim_{\varepsilon\to 0}\left[(x-1)^{1/3}\right]_0^{1-\varepsilon} + 3\lim_{\delta\to 0}\left[(x-1)^{1/3}\right]_{1+\delta}^{2} =$$

$$= 3\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{1-\varepsilon-1}-\sqrt[3]{-1}\right)+\lim_{\delta\to 0}\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{1+\delta-1}\right)\right] = 3(1+1) = 6\,.$$

В задачах **457 – 462** вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

457. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. **458.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x}dx$.

459. $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}$. **460.** $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

461. $\int\limits_0^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}$. **462.** $\int\limits_1^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

6. 4. Приближенное вычисление определенных интегралов

Если в определенном интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$ первообразная подынтегральной функции не выражается в элементарных функциях, то значение определенного интеграла находят приближенно, используя формулы *прямоугольников*, *трапеций*, *парабол* (*формула Симпсона*).

Для этого отрезок интегрирования [a; b] делят на n равных частей точками $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\dots,\ x_i\ ,\dots,\ x_{n-1},\ x_n = b$ и вычисляют значения $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1),\dots, y_i = f(x_i),\dots,\ y_n = f(x_n)$ подынтегральной функции.

При приближенном вычислении определенного интеграла используют следующие формулы:

1. *Формула прямоугольников.*

$$\boldsymbol{\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\dots+y_n)+R_n}\ ,$$

где погрешность R_n определяется из неравенства $|R_n| \le \frac{(b-a)^2}{2n}\cdot M_1$, где M_1 есть наибольшее значение абсолютной величины производной $f'(x)$ на отрезке $[a;b]$.

2. *Формула трапеций.*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) + R_n,$$

где $|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2$, где M_2 есть наибольшее значение абсолютной величины второй производной $f''(x)$ на отрезке $[a;b]$.

3. *Формула Симпсона.*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}\left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})\right] + R_n$$

где $|R_n| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot M_4$ и M_4 есть наибольшее значение абсолютной величины производной четвертого порядка $f^{(4)}(x)$ на отрезке $[a;b]$.

463. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^{0,6}\sqrt{10x^3+4}dx$ по формуле прямоугольников, разбивая отрезок интегрирования на шесть равных частей. Оценить погрешность вычислений.

Решение. По условию задачи $a=0$; $b=0,6$; $n=6$. Вычислим значения подынтегральной функции $y=\sqrt{10x^3+4}$ в соответствующих точках деления.

$x_o=0;\quad y_o=\sqrt{4}=2.$ $\qquad x_1=0,1;\quad y_1=\sqrt{4,01}\approx 2,0025.$

$x_2=0,2;\quad y_2=\sqrt{4,08}\approx 2,0199.$ $\qquad x_3=0,3;\quad y_3=\sqrt{4,27}\approx 2,0664.$

$x_4=0,4;\quad y_4=\sqrt{4,64}\approx 2,1541.$ $\qquad x_5=0,5;\quad y_5=\sqrt{5,25}\approx 2,2913.$

$x_6=0,6;\quad y_6=\sqrt{6,16}\approx 2,4819.$

По формуле прямоугольников получаем

$$\int_0^{0,6} \sqrt{10x^3+4}dx \approx \frac{0,6-0}{6}\left(2+2,0025+2,0119+2,0664+2,1541+2,2913\right)=$$
$= 0,1 \cdot 12,5342 \approx 1,2534.$

Допущенную погрешность R_n определим из неравенства

$|R_n| \le \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M_1$, где M_1 есть наибольшее значение абсолютной величины производной $f'(x)$ подынтегральной на отрезке интегрирования.

Определим значение M_1.

$$y' = \frac{15x^2}{\sqrt{10x^3+4}} \;; \quad y'' = 15 \cdot \frac{5x^4+8x}{\left(10x^3+4\right)\sqrt{10x^3+4}} \;.$$

На отрезке интегрирования $[0; 0,6]$ вторая производная положительна, поэтому y' является возрастающей функцией, принимающей наибольшее значение на правом конце отрезка, то есть при $x = 0,6$. Следовательно,

$M_1 = y'(0,6) \approx 2,176.$ Тогда $|R_n| \le \frac{(0,6-0)^2}{2 \cdot 6} \cdot 2,176 \approx 0,065$.

464. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ по формуле Симпсона, разбивая отрезок интегрирования на десять равных частей.

Решение. По формуле Симпсона имеем:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1-0}{30}\left[y_o + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_9) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_8)\right].$$

Разбиваем отрезок интегрирования на десять равных частей и вычисляем значения подынтегральной функции $y = e^{-x^2}$ в точках деления.

$x_o = 0\,;\quad y_o = e^0 = 1.$ $\qquad x_1 = 0,1\,;\quad y_1 = e^{-0,1^2} \approx 0,9900.$

$x_2 = 0,2\,;\quad y_2 = e^{-0,2^2} \approx 0,9608.$ $\qquad x_3 = 0,3\,;\quad y_3 = e^{-0,3^2} \approx 0,9139.$

$x_4 = 0,4\,;\quad y_4 = e^{-0,4^2} \approx 0,8521.$ $\qquad x_5 = 0,5\,;\quad y_5 = e^{-0,5^2} \approx 0,7788.$

$x_6 = 0,6\,;\quad y_6 = e^{-0,6^2} \approx 0,6977.$ $\qquad x_7 = 0,7\,;\quad y_7 = e^{-0,7^2} \approx 0,6126.$

$x_8 = 0{,}8$; $y_8 = e^{-0{,}8^2} \approx 0{,}5273.$ $x_9 = 0{,}9$; $y_9 = e^{-0{,}9^2} \approx 0{,}4449.$

$x_{10} = 1$; $y_{10} = e^{-1^2} \approx 0{,}3679.$

Подставим найденные значения в формулу Симпсона.

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{30}\Big[1 + 0{,}3679 + 4(0{,}9900 + 0{,}9139 + 0{,}7788 + 0{,}6126 + 0{,}4449) +$$
$$+ 2(0{,}9608 + 0{,}8521 + 0{,}6977 + 0{,}5273)\Big] \approx 0{,}7468.$$

465. Вычислить интеграл $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ по формуле трапеций при $n = 5$.

466. Вычислить интеграл $\int_4^{10} ln\, x dx$ по формуле Симпсона с точностью до 0,001.

Решение. Очевидно, точность приближенного вычисления определенного интеграла зависит от числа n отрезков, на которые разбивается область интегрирования: чем больше n, тем выше точность полученного результата. Для определения наименьшего значения n, обеспечивающего требуемую точность 0,001, воспользуемся оценкой погрешности R_n формулы Симпсона:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M_4, \qquad (6.\ 4)$$

где M_4 - наибольшее значение абсолютной величины производной четвертого порядка $f^{(4)}(x)$ функции $f(x) = ln\, x$ на отрезке [4; 10].

Находим

$$f'(x) = \frac{1}{x}\ ; \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}\ ; \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}\ ; \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Функция $f^{(4)}(x)$ убывает на отрезке [4; 10] , поэтому

$$M_4 = \left|f^{(4)}(4)\right| = \left|-\frac{6}{4^4}\right| = \frac{6}{4^4}.$$

Из формулы (7. 4) получаем:

$$|R_n| < \frac{(10-4)^5}{180n^4} \cdot \frac{6}{4^4}; \quad \frac{6^6}{180n^4 \cdot 4^4} < 0{,}001; \quad n^4 > \frac{1000 \cdot 6^6}{180 \cdot 4^4}; \quad n^4 > \frac{200 \cdot 6^4}{4^4};$$

$$n^4 > 3^4 \cdot 12{,}5; \quad n > 3\sqrt[4]{12{,}5}.$$

Так как $\sqrt[4]{12{,}5} < 2$, то $n > 3\sqrt[4]{12{,}5} \geq 6$. Следовательно, необходимая точность достигается при делении отрезка $[4;10]$ на шесть частей. По формуле Симпсона имеем:

$$\int_4^{10} ln\, x dx \approx \frac{10-4}{3 \cdot 6}\left[ln 4 + ln 10 + 4(ln 5 + ln 7 + ln 9) + 2(ln 6 + ln 8)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[1{,}3863 + 2{,}3026 + 4(1{,}6094 + 1{,}9459 + 2{,}1972) + 2(1{,}7918 + 2{,}0794)\right] \approx 11{,}480.$$

Для сравнения, если этот интеграл вычислить по формуле Ньютона-Лейбница, то получим 11,4808.

467. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{sin\, x}{x} dx$ по формуле трапеций при $n = 10$.

6. 5. Приложения определенного интеграла

6. 5. 1. Вычисление площадей плоских фигур

1. *Фигура задается в прямоугольных координатах.*

а) Площадь S криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 23), ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, снизу – осью Ox, слева и справа соответственно прямыми $x = a$, $x = b$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)dx} \tag{6. 5}$$

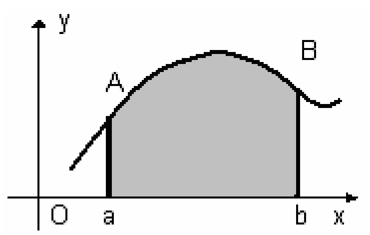


Рис. 23

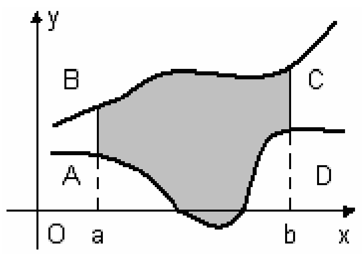


Рис. 24

Если криволинейная трапеция расположена под осью Ox (в этом случае $f(x)<0$), то

$$\boldsymbol{S} = \left|\int_a^b f(x)dx\right|. \tag{6. 6}$$

б) Площадь S криволинейной трапеции $ABCD$ (рис. 24), ограниченной сверху кривой $y = f_2(x)$, снизу – $y = f_1(x)$, слева и справа соответственно прямыми $x = a$, $x = b$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{S} = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \tag{6. 7}$$

2. Если кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задается в *параметрической форме* уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то площадь S трапеции определяется по формуле

$$\boldsymbol{S} = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt, \tag{6. 8}$$

где t_1 и t_2 определяются из равенств $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$.

3. Если фигура есть криволинейный сектор OAB, ограниченный кривой, заданной в *полярной системе координат* уравнением $r = r(\varphi)$ и полярными радиус-векторами OA и OB (рис. 25), то ее площадь S вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\varphi. \tag{6. 9}$$

468. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 - 6x + 5$ и осями координат.

Решение. Парабола $y = x^2 - 6x + 5$ пересекает ось абсцисс в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$. Данная фигура (рис. 26) состоит из двух криволинейных трапеций, одна из которых расположена выше оси Ox, а другая – ниже.

По формулам (6. 5) и (6. 6) имеем:

$$S = \int_0^1 (x^2 - 6x + 5)dx + \left|\int_1^5 (x^2 - 6x + 5)dx\right| =$$

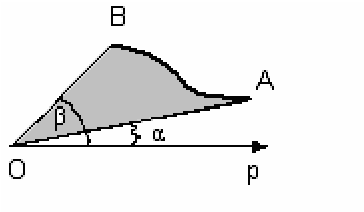


Рис. 25

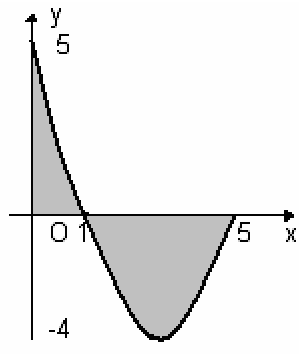


Рис. 26

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right]_0^1 + \left| \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right]_1^5 \right| = 2\frac{1}{3} + \left| -10\frac{2}{3} \right| = 13 \text{ (кв. ед.)}.$$

469. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения данной параболы и прямой (рис. 27): $x^2 + 4x = x + 4$, $x^2 + 3x - 4 = 0$, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

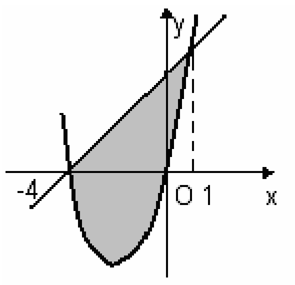


Рис. 27

По формуле (6. 7) имеем

$$S = \int_{-4}^{1} (x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int_{-4}^{1} (4 - x^2 - 3x)dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_{-4}^{1} = 4 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 16 - \frac{64}{3} + 24 =$$

$$= 20\frac{5}{6} (\textit{кв. ед.})$$

В задачах **470 – 478** вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями.

470. $y = 2x - x^2$; $y = -x$.

471. $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 3$; $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$.

472. $x^2 - 3y = 0$; $2x^2 + 3y - 12 = 0$.

473. $x^2 + y^2 = 8$; $x^2 - 2y = 0$.

474. $y = \frac{x^2}{2}$; $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

475. $y = ln x$; $x = e$; $y = 0$.

476. $y^2 = x^3$; $y = 8$; $x = 0$.

477. $y = x^3$; $y = 4x$.

478. $y = 2x - x^2$; $y = -x$.

479. Найти площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнениями $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Решение. Из уравнений данной кривой имеем:

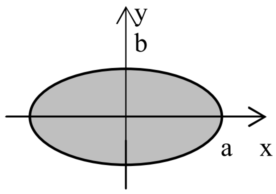


Рис. 28

$$\frac{x}{a} = \cos t,\quad \frac{y}{b} = \sin t,\quad \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t,\quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t.$$

Отсюда $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Это уравнение определяет эллипс с полуосями *a* и *b*, симметричный относительно обеих осей координат (рис. 28).

Найдем по формуле (6. 8) площадь четвертой части рассматриваемой фигуры и умножим полученный результат на 4.

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= ab\left[\frac{1}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi ab.$$

Отсюда $S = \pi ab$.

480. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$ (рис. 29).

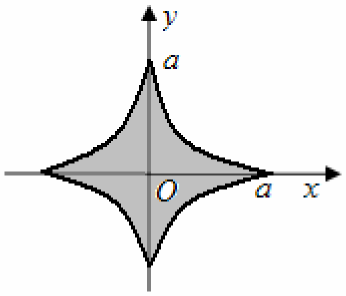


Рис. 29

Решение. Данная астроида симметрична относительно осей координат, поэтому удобно вычислить площадь части фигуры, расположенной в первом квадранте и полученный результат умножить на четыре. Для нахождения пределов изменения параметра t воспользуемся уравнением $x = a\cos^3 t$. При изменении *x* от *0* до a переменная t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0. Тогда искомая площадь S равна:

$$S = 4\int_0^a ydx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\,sin^3 t \cdot a \cdot 3cos^2 t \cdot (-sin\,t)dt =$$

$$= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 t \cdot cos^2 tdt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2t \cdot sin^2 tdt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2t \cdot \frac{1-cos\,2t}{2}dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2 2t - sin^2 2t \cdot cos\,2t)dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos\,4t}{2}dt - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2t(d\,sin\,2t)\right] = \frac{3}{2}a^2\left[\frac{t}{2} - \frac{sin\,4t}{8} - \frac{sin^3 2t}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

481. Найти площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - sin\,t)$, $y = a(1 - cos\,t)$ и осью Ox.

482. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x = 12cos\,t + 5sin\,t$, $y = 5cos\,t - 12sin\,t$.

483. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 2\,sin\,3\varphi$.

Решение. Рассматриваемая фигура состоит из трех лепестков (рис.30) (для построения данной кривой нужно составить таблицу значений r от φ). Для одного лепестка полярный угол φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{3}$

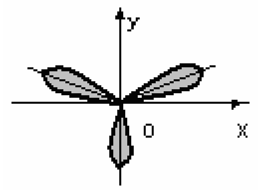


Рис. 30

По формуле (6. 9) площадь S_1 половины одного лепестка равна

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin^2 3\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 6\varphi)d\varphi = \left[\varphi - \frac{\sin 6\varphi}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}.$$

Искомая площадь $S = 6S_1 = \pi$.

484. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + cos\varphi)$.

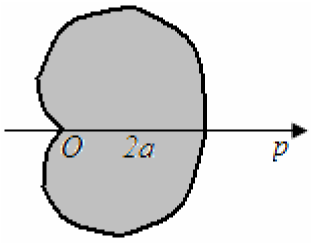


Рис. 31

Решение. Полярный угол φ данной кардиоиды (рис. 31) меняется от 0 до 2π. Так как кривая симметрична относительно полярной оси *Op*, искомую площадь найдем удвоением площади верхней части фигуры, для которой угол φ изменяется от 0 до π. По формуле (6. 9) получаем

$$S = \int_0^\pi a^2(1 + cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^\pi \left(1 + 2cos\varphi + cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2[\varphi + 2sin\varphi]_0^\pi + a^2\int_0^\pi \frac{1 + cos2\varphi}{2}d\varphi = \pi a^2 + a^2\left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}sin2\varphi\right]_0^\pi =$$

$$= \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = 1{,}5\pi a^2.$$

485. Вычислить площадь одного лепестка фигуры, ограниченной линией $r = a\,sin2\varphi$.

486. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = a\,cos3\varphi$.

487. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 6cos3\varphi$ и лежащей вне круга $r = 3$.

488. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 2a(2 + cos\varphi)$.

6. 5. 2. Вычисление объемов тел

Пусть известна площадь $S(x)$ любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*. Если проекцией этого тела на ось абсцисс является отрезок [*a*; *b*], то объем V этого тела определяется по формуле

$$\boldsymbol{V = \int_a^b S(x)dx}. \qquad (6.\ 10)$$

Рассмотрим тела, образованные вращением плоских фигур вокруг осей координат.

1. *Вращение вокруг оси Ox.*

Если криволинейная трапеция *aABb* (рис. 32), ограниченная сверху кривой $y = f(x)$, снизу – осью *Ox*, слева и справа соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объем полученного тела вращения вычисляется по формуле

$$V_{ox} = \pi \int_a^b y^2 dx \,. \qquad (6.\ 11)$$

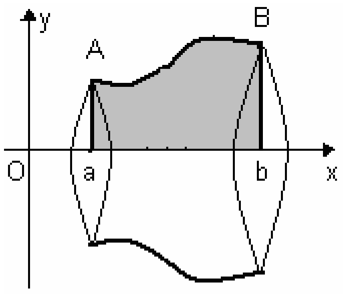


Рис. 32

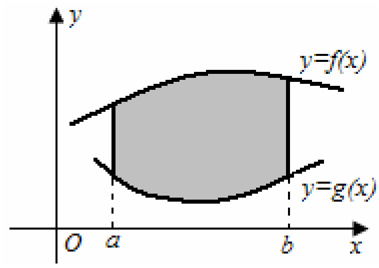


Рис. 33

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры (рис. 33), ограниченной кривыми $y = g(x)$ и $y = f(x)$ (здесь $0 \le g(x) \le f(x)$), прямыми $x = a$, $x = b$ вычисляется по формуле

$$V_{ox} = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx \,. \qquad (6.\ 12)$$

2. *Вращение вокруг оси Oy.*

Пусть криволинейная трапеция $cCDd$ (рис.34), ограниченная кривой $x = \varphi(y)$ (дуга CD), прямыми $y = c$, $y = d$ и осью Oy, вращается вокруг оси Oy.

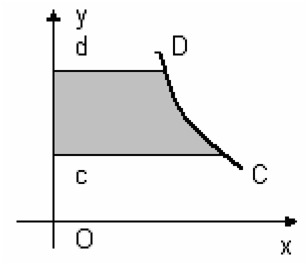


Рис. 34

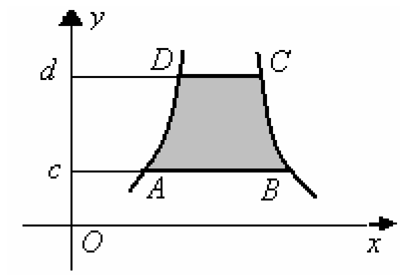


Рис. 35

Объем V_{oy} тела вращения вычисляется по формуле

$$V_{oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy \,. \qquad (6.\ 13)$$

Если вокруг оси Oy вращается фигура $ABCD$ (рис. 35), ограниченная слева кривой $x=\varphi_1(y)$ (дуга AD), справа – кривой $x=\varphi_2(y)$ (дуга BC) снизу и сверху соответственно прямыми $y=c$ и $y=d$, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{V_{oy}=\pi\int\limits_c^d\left[\varphi_2{}^2(y)-\varphi_1{}^2(y)\right]dy}. \qquad (6.\ 14)$$

489. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны синусоиды $y = sinx$.

Решение. По формуле (6. 11) имеем:

$$V=\pi\int\limits_0^\pi sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi(1-cos\,2x)dx=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}sin\,2x\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}.$$

490. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линией $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

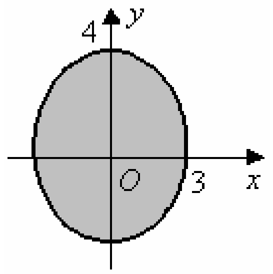


Рис. 36

Решение. Данная кривая есть эллипс с полуосями $a=3$; $b=4$, симметричный относительно осей координат (рис.36). Поэтому искомый объем тела найдем как удвоенный объем тела, полученного вращением четвертой части данной фигуры, расположенной в первой четверти. Из уравнения эллипса находим y^2 и применяем формулу (6. 11) :

$y^2=16\left(1-\frac{x^2}{9}\right)$. Имеем:

$$V=2\pi\int\limits_0^3 y^2dx=32\pi\int\limits_0^3\left(1-\frac{x^2}{9}\right)dx=32\pi\left[x-\frac{x^3}{27}\right]_0^3=64\pi.$$

491. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $y=x+3$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения параболы и прямой (рис. 37) :

$$\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=x+3 \end{cases};\quad x^2+1=x+3;\quad x^2-x-2=0;$$

$x_1=-1;\quad x_2=2$.

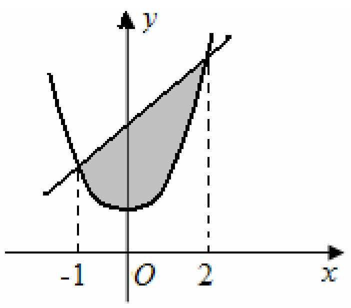


Рис. 37

По формуле (6. 12) получаем:

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left[(x+3)^2 - \left(x^2+1\right)^2 \right] dx = \pi \int_{-1}^{2} \left(6x - x^4 - x^2 + 8\right) dx =$$

$$= \pi \left[3x^2 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 8x \right]_{-1}^{2} = 23{,}4\pi .$$

492. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$ (рис. 29).

Решение. Данная астроида симметрична относительно осей координат. Поэтому искомый объем тела найдем как удвоенный объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy четвертой части данной фигуры, расположенной в первом квадранте.

По формуле (6. 13) имеем $V = 2\pi \int_{c}^{d} x^2 dy$. При изменении y от 0 до a переменная t меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$V = 2\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^6 t \cdot a \cdot 3\sin^2 t \cos t dt = 6\pi a^3 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 t\right)^3 \sin^2 t d(\sin t) =$$

$$= 6\pi a^3 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 3\sin^2 t + 3\sin^4 t - \sin^6 t\right) \cdot \sin^2 t \cdot d(\sin t) =$$

$$= 6\pi a^3 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 t - 3\sin^4 t + 3\sin^6 t - \sin^8 t\right) d(\sin t) =$$

$$= 6\pi a^3\left[\frac{sin^3 t}{3}-\frac{3sin^5 t}{5}+\frac{3sin^7 t}{7}-\frac{sin^9 t}{9}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{105}\pi a^3 .$$

В задачах **493 – 498** вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной указанными линиями.

493. $y = x^2$; $y = 2x$. **494.** $y = 2x - x^2$; $y = 0$.

495. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; $y = 0$. **496.** $y = x^2$; $x = y^2$.

497. $y = x^2 + 1$; $y = 3x - 1$. **498.** $x = a\cos t$; $y = b\sin t$.

В задачах **499 – 501** вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной указанными линиями.

499. $y^2 - 3y + x = 0$; $x = 0$.

500. $x^2 - y^2 = 4$; $y = -2$; $y = 2$.

501. $xy = 2$; $y = 2$; $y = 4$; $x = 0$.

502. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.

6. 5. 3. Вычисление длины дуги плоской кривой

Если кривая задается в прямоугольных координатах уравнением $y=f(x)$, где $x \in [a; b]$, то длина L дуги этой кривой определяется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx . \qquad (6.\ 15)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x= x(t)$, $y=y(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$, то

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt . \qquad (6.\ 16)$$

Если кривая задается в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi. \qquad (6.\ 17)$$

503. Найти длину дуги кривой $y=x\sqrt{x}$, отсекаемой прямой $x = 5$.
Решение. Найдем производную данной функции:

$$y'=(x\sqrt{x})'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

По формуле (6. 15) имеем:

$$L=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^5(4+9x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{18}\int_0^5(4+9x)^{\frac{1}{2}}d(4+9x)=$$

$$=\frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}\left[(4+9x)^{1/2}\right]_0^5=\frac{1}{27}(243-8)=\frac{335}{27}.$$

504. Найти длину дуги кривой $y=ln\,x$ от $x=2\sqrt{2}$ до $x=\sqrt{15}$.
Решение. По формуле (6. 15) имеем:

$$L=\int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{15}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx=\int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\cdot x\,dx.$$

Последний интеграл вычислим подстановкой $\sqrt{x^2+1}=t$, откуда $xdx=tdt$, $x^2=t^2-1$.

Тогда

$$L=\int_3^4\frac{t}{t^2-1}\cdot t\,dt=\int_3^4\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int_3^4\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\left[t+ln\frac{t-1}{t+1}\right]_3^4=1+ln1{,}2.$$

505. Найти длину дуги кривой $y^2=4x$, отсекаемой прямой $x = 1$.

506. Найти длину одной арки циклоиды
$x=a(t-sin\,t),\ y=a(1-cos\,t)$ (рис. 38).

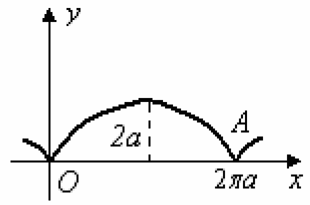


Рис. 38

Решение. Длину этой дуги определим по формуле

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

Пределы интегрирования t_1 и t_2 находим из уравнения $y = a(1 - \cos t) = 0$ (так как ординаты точек O и A равны 0). Отсюда $\cos t = 1$ и $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

Находим $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$. Тогда

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1-\cos t)]^2 + (a \sin t)^2}\, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -4a \left[\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8\, a.$$

507. Вычислить длину астроиды $x = a \cos^3 t$; $y = a \sin^3 t$.

508. Вычислить длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Решение. Поскольку кардиоида (рис. 39) симметрична относительно полярной оси Op, по формуле (6. 17) имеем

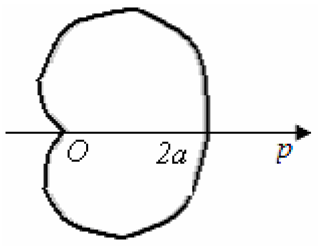


Рис. 39

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2 (1 + \cos\varphi)^2 + (-a \sin\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{4 \cdot \frac{1 + \cos\varphi}{2}}\, d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 8a \left[\sin \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\pi} = 8a.$$

509. Вычислить длину спирали Архимеда $r = a\varphi$ от полюса до конца первого витка.

6. 5. 4. Вычисление площади поверхности вращения

Если непрерывная на отрезке $[a; b]$ кривая $y = f(x)$ вращается вокруг оси Ox, то площадь S поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx. \qquad (6.\ 18)$$

Если дуга кривой задается параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$, то

$$S = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt. \qquad (6.\ 19)$$

510. Найти площадь поверхности эллипсоида, образованного вращением вокруг оси Ox эллипса $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

Решение. Из уравнения эллипса находим $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$, откуда $y'=\frac{-x}{2\sqrt{4-x^2}}$. По формуле (6. 18) имеем:

$$S = 2\pi\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{4(4-x^2)}}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{16-3x^2}\,dx = \pi\int_0^2\sqrt{16-3x^2}\,dx.$$

Для вычисления последнего интеграла применим подстановку $x=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin t$, откуда $dx=\frac{4}{\sqrt{3}}\cos t\,dt$. Если x=0, то t=0; $t=\frac{\pi}{3}$ при x=2.

Тогда

$$S = \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16-16\sin^2 t}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cos t\,dt = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,dt = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

511. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y=\frac{1}{3}x^3$, концы которой имеют абсциссы $x=0$ и $x=2\sqrt[4]{5}$.

512. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y=\dfrac{x^3}{3}$ от $x=-2$ до $x=2$.

513. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y^2=x+4$ от $x=-4$ до $x=2$.

514. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox одной полуволны кривой $y=\sin x$.

515. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox астроиды $x=a\cos^3 t$; $y=a\sin^3 t$ (рис. 29).

Решение. Находим $x'=-3a\cos^2 t\sin t$; $y'=3a\sin^2 t\cos t$. Так данная астроида симметрична относительно осей координат, то по формуле (6. 19) имеем

$$S=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\sqrt{\sin^2 t\cdot\cos^2 t\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}dt=$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos t\,dt=\frac{12}{5}\pi a^2\left[\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

516. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $x=\dfrac{t^3}{3}$, $y=4-\dfrac{t^2}{2}$ между точками ее пересечения с осями координат.

6. 5. 5. Вычисление координат центра тяжести

Координаты центра тяжести $(x_c; y_c)$ *однородной дуги* плоской кривой $y=f(x)$, где $x\in[a;b]$, определяются по формулам:

$$\boldsymbol{x_c=\frac{M_y}{L}=\frac{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(y')^2}dx}{L}}, (6.20).\quad \boldsymbol{y_c=\frac{M_x}{L}=\frac{\int_a^b y\cdot\sqrt{1+(y')^2}dx}{L}}, (6.21)$$

где L – длина дуги; M_x - статический момент дуги относительно оси *Ox*; M_y - статический момент дуги относительно оси *Oy*.

Координаты центра тяжести $(x_c; y_c)$ *однородной криволинейной трапеции*, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью *Ox*, определяются по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{S}, \quad (6.22) \qquad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{S}, \quad (6.23)$$

где S – площадь криволинейной трапеции; M_x - статический момент относительно оси *Ox*; M_y - статический момент относительно оси *Oy*.

Координаты центра тяжести $(x_c; y_c)$ *однородной плоской фигуры*, ограниченной сверху кривой $y_2 = f(x)$, снизу – кривой $y_1 = \varphi(x)$, слева и справа соответственно прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{\int_a^b x(y_2 - y_1)dx}{S}, \quad (6.24) \qquad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left[(y_2)^2 - (y_1)^2\right]dx}{S}, \quad (6.25)$$

где S – площадь фигуры.

Теорема 1 *Гульдена.* Площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости этой кривой и не пересекающей ее, равна длине дуги кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести дуги.

Теорема 2 *Гульдена*. Объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, не пересекающей ее и расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры.

517. Найти центр тяжести полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной над осью *Ox*.

Решение. Так верхняя полуокружность симметрична относительно оси *Oy*, то ее центр тяжести находится на этой оси, поэтому $x_c = 0$. Вторую координату y_c найдем по формуле (6. 21).

Для вычисления статического момента $M_x=\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ находим $y=\sqrt{R^2-x^2}$; $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

Тогда

$$M_x=\int\limits_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=\int\limits_{-R}^{R}R\,dx=2R^2 .$$

Так как длина данной полуокружности равна $L=\pi R$, то $y_c=\dfrac{M_x}{L}=\dfrac{2R^2}{\pi R}=\dfrac{2R}{\pi}$ и $C\left(0;\dfrac{2R}{\pi}\right)$ − центр тяжести данной линии.

518. Найти координаты центра тяжести окружности $x^2+y^2=R^2$, расположенной в первом квадранте.

519. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2=x^3$, $x=4$.

Решение. Данная фигура (рис. 40) симметрична относительно оси *Ox*,

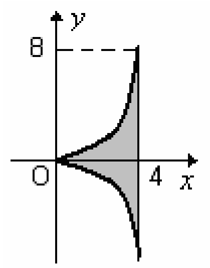


Рис. 40

ее центр тяжести находится на этой оси, поэтому $y_c=0$.

Найдем площадь *S* фигуры:

$$S=2\int\limits_0^4\sqrt{x^3}\,dx=\frac{4}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4=\frac{128}{5}.$$

По формуле (6. 22) имеем

$$x_c=\frac{\int\limits_0^4 x\sqrt{x^3}\,dx}{\frac{128}{5}}=\frac{5}{128}\int\limits_0^4 x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{5}{448}\left[x^{\frac{7}{2}}\right]_0^4=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}.$$

Итак, точка $C(1\frac{3}{7};0)$ − центр тяжести данной фигуры.

520. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной дугой эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, расположенной в первой четверти.

Решение. Запишем уравнение эллипса в параметрической форме: $x = a\cos t; \quad y = b\sin t$. Для этого эллипса при возрастании x от 0 до a параметр t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0. Площадь данной фигуры равна $\frac{1}{4}\pi ab$ (см. задачу № 479). По формуле (6. 22) имеем:

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b xydx}{S} = \frac{4}{\pi ab}\int\limits_0^a xydx = \frac{4}{\pi ab}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 a\cos t \cdot b\sin t(-a\sin t)dt =$$

$$= \frac{4a}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos t dt = \frac{4a}{3\pi}\left[\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Подобным образом

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2 dx}{S} = \frac{2}{\pi ab}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 b^2\sin^2 t(-a\sin t)dt = \frac{2b}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1-\cos^2 t\right)d(\cos t) =$$

$$= \frac{2b}{\pi}\left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{4b}{3\pi}.$$

Следовательно, точка $C\left(\frac{4a}{3\pi}; \frac{4b}{3\pi}\right)$ – центр тяжести данной фигуры.

521. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$.

522. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

523. Найти координаты центра тяжести дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, расположенной в первой четверти.

524. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ и осями координат.

6. 5. 6. Приложения определенного интеграла к решению некоторых физических задач

1. *Путь, пройденный точкой.*

Если точка движется по кривой и ее скорость $V = V(t)$ есть функция времени t, то путь S, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1; t_2]$, равен

$$\boldsymbol{S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt}. \tag{6. 26}$$

2. *Сила давления жидкости.*

Сила P давления жидкости на вертикально погруженную в нее площадку, ограниченную прямыми $x = a, x = b$, кривыми $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ ($y_1 \le y_2$), равна

$$\boldsymbol{P = \rho\int_{a}^{b} (y_2 - y_1)dx}. \tag{6. 27}$$

Здесь ρ - плотность жидкости.

3. *Работа силы.*

Работа A переменной силы $F(x)$, действующей в направлении оси Ox на отрезке $[a; b]$, равна

$$\boldsymbol{A = \int_{a}^{b} F(x)dx}. \tag{6. 28}$$

525. Скорость движения точки равна $V = \left(9t^2 - 4t\right)$ *м/с.* Найти путь S, пройденный точкой за первые 6 с после начала движения.

Решение. По формуле (6. 26) имеем

$$S = \int_0^6 \left(9t^2 - 4t\right)dt = \left[3t^3 - 2t^2\right]_0^6 = 576\,м.$$

526. Скорость движения точки равна $V = \left(6t - 2t^2\right)$ *м/с.* Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

Решение. Из уравнения $V = 6t - 2t^2 = 0$ определяем время $t_1 = 0$ начала движения и $t_2 = 3$ остановки точки. По формуле (6. 26) имеем

$$S = \int_0^3 \left(6t - 2t^2\right) dt = \left[3t^2 - \frac{2t^3}{3}\right]_0^3 = 9 \text{ } м.$$

527. Скорость тела задается формулой $V = \sqrt{1+t}$ *м/с*. Найти путь, пройденный телом за первые 10 *с* после начала движения.

528. Найти силу давления воды на вертикальную стенку формы полукруга радиуса R *м*, диаметр которой находится на поверхности воды. Плотность воды $\rho = 1000$ *кг/м*^{3} (рис. 41).

Решение.

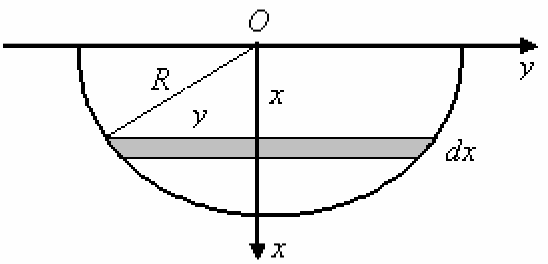


Рис. 41

Для вычисления силы давления жидкости на погруженную в нее площадку применим закон Паскаля, по которому давление жидкости на площадку равно площади площадки S , умноженной на глубину погружения h, плотность жидкости ρ, ускорение силы тяжести g, то есть $P = \rho ghS$.

Дифференциал dP силы давления воды на элементарную площадку равен $dP = 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2} dx$. Отсюда

$$P = 2\rho g \int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2} dx = -\rho g \int_0^R \left(R^2 - x^2\right)^{1/2} d\left(R^2 - x^2\right) =$$

$$= -\frac{2\rho g}{3}\left[\left(R^2 - x^2\right)^{3/2}\right]_0^R = \frac{2\rho g}{3} \cdot R^3 \approx \frac{2 \cdot 1000 \cdot 9{,}8}{3} \cdot R^3 \approx 6533 R^3 \text{ } Н.$$

529. Вычислить силу давления жидкости плотности ρ на пластинку, имеющую форму равнобочной трапеции с основаниями a и b и высотой h, погруженную вертикально в жидкость на глубину c (рис. 42).

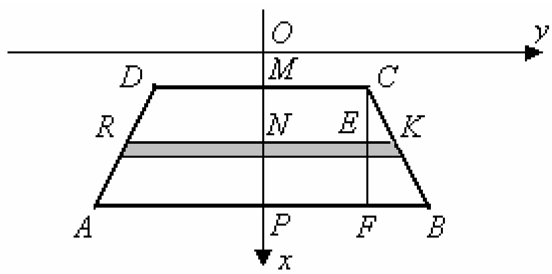


Рис. 42

Решение. Пусть $DC = a$, $AB = b$, $CF = h$, $OM = c$, $ON = x$.

Разобьем отрезок MP на n частей, через точки деления проведем прямые, параллельные оси Oy. Тем самым пластинка разделится на n элементарных полос. Выберем одну такую элементарную полосу, площадь которой dS приближенно равна площади прямоугольника со сторонами KR и dx (ширина площадки).

Тогда

$$dS = KR \cdot dx = 2NK \cdot dx = 2(NE + EK) \cdot dx = 2\left(\frac{b-a}{2} + EK\right) \cdot dx =$$

$$= (b - a + 2EK) \cdot dx$$

Длину отрезка EK найдем из подобия треугольников CEK и CFB:

$$\frac{EK}{FB} = \frac{CE}{CF}; \quad \frac{EK}{\frac{b-a}{2}} = \frac{x-c}{h}. \text{ Отсюда } EK = \frac{(b-a)(x-c)}{2h}.$$

Получаем

$$dS = 2\left[\frac{a}{2} + \frac{(b-a)(x-c)}{2h}\right]dx = \left[a + \frac{b-a}{h} \cdot (x-c)\right]dx.$$

Следовательно, искомая сила давления равна

$$P = \rho g \int_c^{c+h} x ds = \rho g \int_c^{c+h} \left[a + \frac{b-a}{h} \cdot (x-c)\right] x dx =$$

$$= \rho g \left[a x^2 + \frac{b-a}{h} \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2} \cdot c x^2\right)\right]_c^{c+h} = \rho g \left[\frac{a+b}{2} \cdot ch + \frac{h^2}{6} \cdot (a + 2b)\right].$$

530. Вычислить силу давления воды на погруженную в нее вертикальную пластинку треугольной формы так, что основание треугольника лежит на поверхности воды и равно 12 *см*, а высота равна 9 *см*.

531. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму эллипса, большая ось которого находится на поверхности воды, если большая ось эллипса равна 6 *м*, а малая – 4 *м*.

532. Вычислить работу, необходимую для выкачивания жидкости из вертикальной цилиндрической цистерны, имеющей основание R и высоту H.

Решение. Разобьем цилиндр на n слоев. Пусть толщина слоя на глубине x равна dx. Тогда работа dA по перемещению этого слоя на высоту x равна $dA = \rho g \pi R^2 x dx$. Искомая работа равна

$$A=\int_0^H \rho g\pi R^2 x dx=\rho g\pi R^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^H=\frac{1}{2}\pi\rho g R^2 H^2.$$

533. Вычислить работу, необходимую для выкачивания жидкости из полусферической емкости радиуса R.

534. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 5 *см*, если под действием силы в 1 *Н* она растягивается на 2 *см* ?

Решение. По закону Гука сила F, растягивающая (сжимающая) пружину, пропорциональна величине x растяжения (сжатия) пружины, то есть $F = kx$, коэффициент пропорциональности (зависит от свойств пружины). Из условия задачи $F = 1\ Н$ при $x = 0{,}02\ м$, то есть $1 = k\cdot 0{,}02$, откуда $к = 50$. Тогда $F(x)=50x$.

По формуле (6. 28) имеем:

$$A=\int_0^{0,05} 50x dx=\left[25x^2\right]_0^{0,05}=0{,}0625\ (дж.).$$

535. Какую работу нужно совершить, чтобы сжать пружину на 0,06 *м*, если при действии силы 1*Н* она сжимается на 0,01 *м* ?

ГЛАВА 7. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

7. 1. Основные понятия

Если каждой паре (x; y) действительных чисел из области D по определенному закону ставится в соответствие действительное число z, то переменная величина z называется *функцией двух независимых переменных* x и y и обозначается $z = f(x;y)$ или $z = z(x;y)$.

Подобным образом определяется функция большего числа переменных $z = f(x_1; x_2; ...; x_n)$.

Областью определения (*существования*) функции $z = f(x;y)$ называется совокупность пар $(x;y)$ действительных чисел (точек плоскости xOy), для которых z принимает действительные значения.

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой области D. Тогда каждой точке $P(x;y)$ этой области соответствует точка $M(x;y;z)$ пространства. Множество этих точек представляют некоторую поверхность, которая называется *графиком функции* $z = f(x;y)$.

Если переменной x придать приращение Δx, оставляя при этом переменную y неизменной, то разность $f(x+\Delta x;y) - f(x;y) = \Delta_x z$ называется *частным приращением* функции z по переменной x.

Если переменной y придать приращение Δy, оставляя при этом переменную x неизменной, то разность $f(x;y+\Delta y) - f(x;y) = \Delta_y z$ называется *частным приращением* функции z по переменной x.

Если переменные x и y получают соответственно приращения Δx и Δy, то разность $f(x+\Delta x;y+\Delta y) - f(x;y) = \Delta z$ называется *полным приращением* функции z.

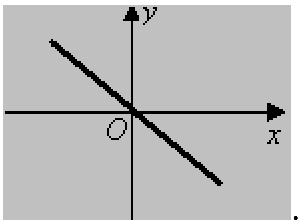
В задачах **536 – 540** найти и изобразить области определения следующих функций:

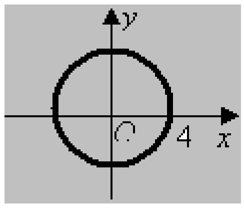
536. $z = \dfrac{5}{x+y}$.

Решение.

Функция z определена, если знаменатель дроби отличен от нуля, то есть $x + y \neq 0$, $y \neq -x$. Этому условию удовлетворяют координаты точек плоскости xOy, не лежащих на прямой $y = -x$ (рис. 43).

537. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$.





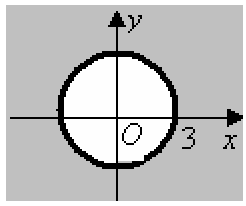


Рис. 43 Рис. 44 Рис. 45

Решение. Функция принимает действительные значения при условии $\sqrt{x^2 + y^2} - 4 \neq 0$; $x^2 + y^2 \neq 4^2$. Этому условию удовлетворяют координаты точек плоскости xOy, не лежащие на окружности радиуса 4 с центром в начале координат (рис. 44).

538. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$.

Решение. $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$; $x^2 + y^2 \geq 9$. Этому неравенству удовлетворяют координаты точек, лежащих на окружности радиуса 3 с центром в начале координат и вне этой окружности (рис. 45).

539. $z = loq_3\left(y - x^2\right)$.

Решение. $y - x^2 > 0$, $y > x^2$. Решением этого неравенства являются координаты точек, лежащих выше параболы $y = x^2$ (рис. 46).

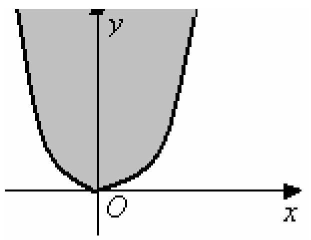


Рис. 46

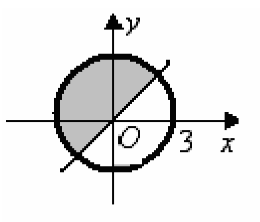


Рис. 47

540. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + ln(y - x)$.

Решение. Области определения функции принадлежат точки, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 9 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ y - x > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ y > x \end{cases}.$$

Решением этой системы неравенств являются координаты точек части круга радиуса 3 с центром в начале координат, лежащих выше прямой $y = x$ (точки этой прямой не входят в область определения) (рис. 47).

В задачах **541 – 549** найти области определения функций:

541. $z=\sqrt{xy}$. **542.** $z=\dfrac{1}{x-y}$.

543. $z=\dfrac{x+y}{x-y}$. **544.** $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

545. $z=ln\left(x^2+2y\right)$. **546.** $z=\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{8}{y}$.

547. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$. **548.** $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+ln\left(25-x^2-y^2\right)$.

549. $z=x+arccos\,y$.

550. Для функции $z=x^2-xy+y^2$ определить приращения $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz и вычислить их значения, если аргумент x изменяется от 2 до 2,4, а аргумент y изменяется от 5 до 4,8.

Решение.

$$\Delta_x z=z(x+\Delta x;y)-z(x;y)=\left[(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)y+y^2\right]-\left(x^2-xy+y^2\right)=$$
$$=(2x-y)\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$
$$\Delta_y z=z(x;y+\Delta y)-z(x;y)=\left[x^2-x(y+\Delta y)+(y+\Delta y)^2\right]-\left(x^2-xy+y^2\right)=$$
$$=(2y-x)\cdot\Delta y+(\Delta y)^2.$$
$$\Delta z=z(x+\Delta x;y+\Delta y)-z(x;y)=$$
$$=\left[(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)(y+\Delta y)+(y+\Delta y)^2\right]-\left(x^2-xy+y^2\right)=$$
$$=(2x-y)\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+(2y-x)\cdot\Delta y+(\Delta y)^2-\Delta x\cdot\Delta y.$$

В полученные выражения приращений подставим $x=2$; $\Delta x=0{,}4$; $y=5$; $\Delta y=-0{,}2$. Имеем

$$\Delta_x z=(2\cdot2-5)\cdot0{,}4+0{,}4^2=-0{,}24;$$
$$\Delta_y z=(2\cdot5-2)\cdot(-0{,}2)+(-0{,}2)^2=-1{,}56;$$
$$\Delta z=-1{,}72.$$

551. Как изменится объем цилиндра радиуса R = 10 *см* и высоты H = 6 *см*, если радиус увеличить на 1 *см*, а высоту уменьшить на 1 *см* ?

Решение. Объем V цилиндра равен $V=\pi R^2H$. Находим значение полного приращения $\Delta V=\pi(R+\Delta R)^2(H+\Delta H)-\pi R^2H$ при R=10, H=6, ΔR=1, ΔH= −1:

$$\Delta V=\pi(R+\Delta R)^2(H+\Delta H)-\pi R^2H=\pi(10+1)^2(6-1)-\pi10^2\cdot6=25\pi.$$

Следовательно, объем цилиндра увеличится на 25π *см*³.

7. 2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Окрестностью радиуса r точки $P_o(x_o; y_o)$ называется совокупность точек $P(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}<r$, то есть множество всех точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $P_o(x_o; y_o)$.

Число A называется *пределом* функции $z=f(x;y)$ при стремлении точки $P(x;y)$ к точке $P_o(x_o;y_o)$, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε найдется окрестность радиуса r точки P_o, для всех точек $P(x;y)$ которой выполняется неравенство $|f(x;y)-A|<\varepsilon$, что символически записывают так:

$$\lim_{\substack{x\to x_o\\ y\to yo}} f(x;y)=A.$$

Функция $z=f(x;y)$ называется *непрерывной* в точке $P_o(x_o;y_o)$, если она определена в этой точке и ее окрестности и

$$\lim_{\substack{x\to x_o\\ y\to yo}} f(x;y)=f(x_o;y_o).$$

Отсюда следует, что функция будет *непрерывной* в точке, если бесконечно малым приращениям аргументов Δx и Δy соответствует бесконечно малое приращение Δz функции, то есть

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=0.$$

Функция называется *непрерывной в некоторой области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Точки, в которых нарушены условия непрерывности функции, называются *точками разрыва*.

552. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

Решение. Преобразуем дробь и в полученное выражение подставим предельные значения аргументов.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(2-\sqrt{xy+4})\cdot(2+\sqrt{xy+4})}{xy\left(2+\sqrt{xy+4}\right)}=$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4-xy-4}{xy\left(2+\sqrt{xy+4}\right)} = = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{-1}{xy\left(2+\sqrt{xy+4}\right)} = -\frac{1}{4}.$$

553. Доказать, что функция $z = x^2 + xy$ непрерывна на всей плоскости xOy.

Решение. Находим приращение Δz функции:

$$\Delta z = (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^2 - xy =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - x^2 - xy =$$
$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y.$$

Так как $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$ в любой точке $P(x;y)$ плоскости xOy, то данная функция непрерывна на этой плоскости.

554. Исследовать на непрерывность функцию $z = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби являются функциями непрерывными на плоскости xOy. Данная функция имеет разрыв в точках, лежащих на прямой $y = x$ (в этих точках знаменатель дроби равен нулю).

Следовательно, функция непрерывна в любой точке плоскости xOy, исключая точки прямой $y = x$.

555. Доказать, что функция $z = xy^2 - 5y$ непрерывна на плоскости xOy.

В задачах **556 – 558** исследовать на непрерывность функции.

556. $z = \dfrac{x^2}{2x-y}$. **557.** $z = \dfrac{1}{9-x^2-y^2}$.

558. $z = \dfrac{x+4}{x^2+2y^2}$.

7. 3. Частные производные первого порядка

Частной производной функции $z = f(x;y)$ по *переменной* x называется предел при $\Delta x \to 0$ отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, что обозначается одним из следующих символов: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, f'_x.

Частной производной функции $z = f(x; y)$ по *переменной у* называется предел при $\Delta y \to 0$ отношения частного приращения $\Delta_y z$ к приращению Δy, то есть $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$, что обозначается одним из следующих символов: $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, z'_y, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, f'_y.

Подобным образом определяются частные производные первого порядка для функции любого числа переменных. Например, если $u = f(x, y, z)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z}.$$

559. Найти частные производные первого порядка функции

$$z = x^3 \sin y - 4y + \arcsin x.$$

Решение. Полагая y величиной постоянной, находим частную производную по переменной x:

$$z'_x = 3x^2 \sin y + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Для нахождения производной по переменной y считаем x постоянной:

$$z'_y = x^3 \cos y - 4.$$

560. Дана функция $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$. Показать, что

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2}\ ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}.$$

Тогда $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x(2x + y) + y(x + 2y)}{x^2 + xy + y^2} = \dfrac{2(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = 2.$

В задачах **561 – 565** найти частные производные первого порядка указанных функций:

561. $z = e^{x^2 - y^3}$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 - y^3} \cdot \left(x^2 - y^3\right)'_x = 2xe^{x^2 - y^3}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2 - y^3} \cdot \left(x^2 - y^3\right)'_y = -3y^2 e^{x^2 - y^3}.$$

562. $u = ln\left(5 + x^2 - y^3 - z^4\right)$.

Решение. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{5 + x^2 - y^3 - z^4} \cdot \left(5 + x^2 - y^3 - z^4\right)'_x = \dfrac{2x}{5 + x^2 - y^3 - z^4}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-3y^2}{5 + x^2 - y^3 - z^4}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-4z^3}{5 + x^2 - y^3 - z^4}.$$

563. $z = xe^{-xy}$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot e^{-xy} + x \cdot e^{-xy} \cdot (-y) = e^{-xy}(1 - xy)$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 e^{-xy}.$$

564. $z = x^2\, ln\, y + 5x - arctg\, y$. **565.** $z = arctg\dfrac{y}{x}$.

566. Найти значения частных производных первого порядка функции $z = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$ в точке A (2; 1).

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(y + \dfrac{1}{y}\right)$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \left(xy + \frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(x - \frac{x}{y^2}\right).$$

Отсюда $\left[\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]_A = 0{,}5$; $\left[\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]_A = 0$.

567. Доказать, что если $z = \sqrt{x} \cdot sin\dfrac{y}{x}$, то $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{2}$.

Решение. Находим частные производные первого порядка и делаем подстановку в левую часть данного равенства.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot sin\frac{y}{x}+\sqrt{x}\cdot cos\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x\,sin\frac{y}{x}-2y\,cos\frac{y}{x}}{2x\sqrt{x}}\;;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x}\cdot cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x}}.$$

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\left(x\,sin\frac{y}{x}-2y\,cos\frac{y}{x}\right)}{2x\sqrt{x}}+\frac{y\,cos\frac{y}{x}}{\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{x\,sin\frac{y}{x}-2y\,cos\frac{y}{x}+2y\,cos\frac{y}{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}\cdot sin\frac{y}{x}=\frac{z}{2},$$

что и требовалось доказать.

568. Показать, что $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=2$, если $z=ln\left(x^2+xy+y^2\right)$.

569. Показать, что $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z$, если $z=\frac{xy}{x+y}$.

570. Найти значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции $u=ln(xy+z)$ в точке A (2; 1; 0).

7. 4. Полный дифференциал функции нескольких переменных

Полным дифференциалом dz функции $z=f(x;y)$ называется главная, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy часть полного приращения Δz, вычисляемый по формуле

$$\boldsymbol{dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y}. \qquad (7.\ 1)$$

Поскольку $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$, формула (1) принимает вид

$$\boldsymbol{dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy}. \qquad (7.\ 2)$$

Подобным образом вычисляется полный дифференциал функции любого числа независимых переменных. Например, если $u=f(x,y,z)$, то

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Произведение частной производной на дифференциал соответствующего аргумента называется *частным дифференциалом*. Для функции $z = f(x;y)$ ее частные дифференциалы есть $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx$ и $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$ и $dz = d_x z + d_y z$ - полный дифференциал.

При малых значениях приращений Δx и Δy имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$ или $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx dz$, откуда $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + dz$.

Пусть $x = x_1$, $y = y_1$, $x_2 = x_1 + \Delta x$, $y_2 = y_1 + \Delta y$. Тогда

$$\boldsymbol{f(x_2, y_2) \approx f(x_1, y_1) + [dz]_{\substack{x=x_1\\ y=y_1}}}. \qquad (7.\ 3)$$

Формула (7. 3) позволяет находить приближенное значение функции $z = f(x,y)$ в «неудобной» с вычислительных позиций точке $P_2(x_2, y_2)$, если известно ее значение в точке $P_1(x_1, y_1)$. Результат вычислений тем точнее, чем ближе точки P_1 и P_2.

571. Найти полный дифференциал функции

$$z = y^2 \cos x - x^3 e^{y^2+4}.$$

Решение. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -y^2 \sin x - 3x^2 e^{y^2+4}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos x - 2x^3 y e^{y^2+4}.$$

По формуле (7. 2) находим полный дифференциал dz:

$$dz = -\left(y^2 \sin x + x^3 e^{y^2+4}\right)dx + 2y\left(\cos x - x^3 e^{y^2+4}\right)dy.$$

572. Найти полный дифференциал следующих функций:

а) $z = x^3 y + x\,tgx$; *б*) $z = x \sin y + e^x y^3$.

573. Найти значение полного дифференциала функции $u = x^2 - 3xy + 2yz$ в точке $A(2; -1; 3)$.

Решение. Находим полный дифференциал данной функции:

$$du = (2x - 3y)\Delta x + (-3x + 2z)\Delta y + 2y\Delta z.$$

Тогда $[du]_A = 7 \cdot 0{,}02 + 0 \cdot 0{,}03 + (-2)\cdot(-0{,}03) = 0{,}2$.

574. При деформации цилиндра его радиус увеличился с 20 *см* до 20,5 *см*, а высота уменьшилась с 1 *м* до 98 *см*. Найти приближенно изменение объема цилиндра.

Решение. Объем цилиндра $V=\pi R^2 H$. Приращение радиуса $\Delta R = 0{,}5\,см$, а высоты – $\Delta H = -2\ см$. Изменение объема равно полному приращению ΔV, приближенно равному полному дифференциалу dV.

$$dV = d_R V + d_H V = 2\pi RH\cdot\Delta R + \pi R^2\cdot\Delta H.$$

При $R=20\,см$ и $H=100\,см$ получаем

$$dV = 2\pi\cdot 20\cdot 100\cdot 0{,}5 + \pi\cdot 400\cdot(-2) = 1200\pi\left(см^3\right)\approx 3{,}77\left(дм^3\right).$$

Следовательно, объем цилиндра увеличился приближенно на 3,77 $дм^3$.

575. В усеченном конусе радиус нижнего основания $R=20\,см$, радиус верхнего основания $r=10\,см$, а высота $H=30\,см$. Как изменится объем конуса, если радиус R увеличить на 4 *мм*, радиус r уменьшить на 2 *мм*, высоту H уменьшить на 3 *мм* ?

576. Вычислить приближенно число $A = ln\left(\sqrt[3]{0{,}97}+\sqrt[5]{1{,}02}-1\right)$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = ln\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y}-1\right)$. Тогда искомое число $A = z(0{,}97;1{,}02)$. Выберем точки $P_1(1;1)$ и $P_2(0{,}97;\ 1{,}02)$. Тогда $\Delta x = -\,0{,}03$; $\Delta y = 0{,}02$; $z(P_1) = z(1;1) = 0$.

Найдем значение полного дифференциала dz в точке P_1.

$$dz = \frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\Delta x + \dfrac{1}{5\sqrt[5]{y^4}}\cdot\Delta y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y}-1};\quad [dz]_{P_1} = \frac{\dfrac{1}{3}\cdot(-0{,}03)+\dfrac{1}{5}\cdot 0{,}02}{1+1-1} = -0{,}006.$$

Тогда $A = z(0{,}97;1{,}02)\approx 0 - 0{,}006 = -0{,}006$.

7. 5. Дифференцирование сложной и неявной функции

Если в функции $z = f(x,y)$ переменные x и y являются функциями независимой переменной t, то есть $x=\varphi(t)$, $y=g(t)$, то функция $z = f[\varphi(t), g(t)]$ называется *сложной* функцией.

Если функции $\varphi(t), g(t), f[\varphi(t), g(t)]$ дифференцируемы в точке t, то производная функции z по переменной t находится по следующей формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \qquad (7.\ 4)$$

Если в формуле (7. 4) положить $t = x$, то имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}. \qquad (7.\ 5)$$

Производная $\frac{dz}{dx}$, найденная по формуле (7. 5), называется *полной производной* функции z по x.

Если $z = f(u;v)$ есть функция двух переменных u и v, каждая из которых является функцией двух независимых переменных x и y, то частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ вычисляются по формулам (7. 6) и (7. 7):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{7. 6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{7. 7}$$

Если зависимость между переменными x и y задана в *неявной форме* уравнением $F(x,y) = 0$, то производная $\frac{dy}{dx}$ вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{7. 8}$$

Если переменные x, y, z связаны уравнением $F(x;y;z) = 0$, то частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ находят по формулам (7. 9) и (7. 10):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \tag{7. 9}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{7. 10}$$

577. Найти полную производную $\frac{dz}{dx}$ функции $z = x^2 y$, если $y = sinx$.

Решение. Применим формулу (7. 5), для чего найдем $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$, $\frac{dy}{dx} = cos\, x$. Имеем $\frac{dz}{dx} = 2xy + x^2 cos\, x = 2x\, sin\, x + x^2 cos\, x$.

578. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = ln\left(x^2 + y^3\right) - 3z$ и $x = t^3$, $y = t^2$, $z = e^t$.

Решение. Данная функция u зависит от трех переменных: *x*, *y*, *z*. В этом случае ее производная определяется по формуле (аналог формулы (7. 4)):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Применяем эту формулу:

$$\frac{du}{dt} = \frac{2x}{x^2 + y^3} \cdot 3t^2 + \frac{3y^2}{x^2 + y^3} \cdot 2t - 3e^t.$$

Заменим x, y, z их выражениями через t:

$$\frac{du}{dt} = \frac{6t^5}{t^6 + t^6} + \frac{6t^5}{t^6 + t^6} - 3e^t = \frac{6}{t} - 3e^t.$$

579. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^2 e^y$ и $x = sin\,t$, $y = t^3$.

580. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = x^2\sqrt{y^2 + z^2}$ и $x = t^2$, $y = sin\,t$, $z = cos\,t$.

581. Найти полную производную $\frac{dz}{dx}$ функции $z = arcsin\frac{x}{y}$, если $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Решение. Применяем формулу (7. 5):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\ ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\ ; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = 1 - \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

582. Найти производную $\frac{dz}{dx}$ функции $z = e^{xy}$, если $y = sin\,x$.

583. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = ln\left(u^2 + v^2\right)$, если $u = x\,cos\,y$, $v = y\,sin\,x$.

Решение. Применяем формулы (7. 6) и (7. 7).

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+v^2}\ ;\ \ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2v}{u^2+v^2};\ \ \frac{\partial u}{\partial x}=cos\,y;\ \ \frac{\partial v}{\partial x}=y\,cos\,x.$$

По формуле (7. 6) получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v^2}\cdot cos\,y+\frac{2v}{u^2+v^2}\cdot y\,cos\,x=\frac{2}{u^2+v^2}\left(u\,cos\,y+vy\,cos\,x\right)=$$

$$=\frac{2}{x^2cos^2y+y^2sin^2x}\left(x\,cos^2y+y^2sin\,x\,cos\,x\right).$$

Находим $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ и применяем формулу (7. 7).

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x\,sin\,y;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=sin\,x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+v^2}\cdot\left(-x\,sin\,y\right)+\frac{2v}{u^2+v^2}\cdot sin\,x=$$

$$=\frac{2}{u^2+v^2}\left(v\,sin\,x-ux\,sin\,y\right)=\frac{2}{x^2cos^2y+y^2sin^2x}\left(y\,sin^2x-x^2sin\,y\,cos\,y\right).$$

584. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=u\,ln\,v$, если $u=x^2y$, $v=\frac{x}{y}$.

585. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y(x)$, заданной уравнением $xe^y-sin\frac{y}{x}=0$.

Решение. По условию задачи $F(x,y)=xe^y-sin\frac{y}{x}$. Найдем частные производные: $F'_x=e^y+\frac{y}{x^2}cos\frac{y}{x}$; $F'_y=xe^y-\frac{1}{x}cos\frac{y}{x}$.

По формуле (7. 6) имеем

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2e^y+y\,cos\frac{y}{x}}{x^3e^y-x\,cos\frac{y}{x}}.$$

В задачах **586 – 589** найти производную $\frac{dy}{dx}$ неявной функции $y(x)$, заданной следующими уравнениями:

586. $x^2+y^2-4x+6y=0$.

587. $cos(x-y)+y\,sin\,x=0$.

588. $ye^x + e^y = 0$.

589. $\ln y - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = 0$.

590. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z(x;\, y)$, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через $F(x; y; z)$. По формулам (7. 9) и (7. 10) имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x-6}{2z} = \frac{3-x}{z}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y}{2z} = \frac{-y}{z}.$$

591. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z(x;\, y)$, заданной уравнением $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$.

Решение. Из условия задачи имеем

$$F(x; y; z) = x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1.$$

Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\cos y - z\sin x}{-y\sin z + \cos x} = \frac{z\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-x\sin y + \cos z}{-y\sin z + \cos x} = \frac{x\sin y - \cos z}{\cos x - y\sin z}.$$

В задачах **592 – 594** найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z(x;\, y)$, заданной уравнением:

592. $x^3 - 3y^2 + 2z^2 - xz + y = 0$.

593. $z^3 + 3xyz - 6 = 0$.

594. $e^z - xyz = 0$.

7. 6. Градиент функции

Градиентом gradz функции $z = f(x,y)$ называется вектор, лежащий в плоскости xOy, координатами которого являются частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, то есть

$$\boldsymbol{gradz} = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial x}\bar{j}. \qquad (7.\ 11)$$

Градиентом gradu функции $u = f(x,y,z)$ называется вектор, координатами которого являются частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$,то есть

$$\boldsymbol{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}. \qquad (7.\ 12)$$

Направление градиента функции в данной точке есть направление быстрейшего возрастания, то есть направление наибольшей скорости возрастания функции в точке.

Производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ функции $u = f(x,y,z)$ в направлении вектора $\boldsymbol{l}$ находится по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (7.\ 13)$$

где α, β, γ – углы, образованные вектором $\boldsymbol{l}$ с осями координат.

595. Вычислить градиент функции $z = 3x^2y - 3xy^3 + y^4$ в точке $A(1,2)$.

Решение. Находим значения частных производных данной функции в точке A и подставляем их в (7. 11).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 3y^3; \ \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_A = -12; \ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 9xy^2 + 4y^3; \ \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_A = -1.$$

Следовательно, $(gradz)_A = -12\bar{i} - \bar{j}$.

596. Найти наибольшее значение производной по направлению для функции $z = x^2 + 2y^2 + 3$ в точке $A(2, 1)$.

Решение. Наибольшее значение производной по направлению равно модулю градиента функции в данной точке.

$$gradz = 2x\bar{i} + 4y\bar{j}, \ [gradz]_A = 4\bar{i} + 4\bar{j}, \ |gradz| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$$

597. Вычислить градиент функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в точке $A(2;\ 1)$.

598. Определить направление наибольшего изменения функции $u = x\sin z - y\cos z$ в начале координат.

Решение. По формуле (7. 12) находим градиент функции u и его значение в точке $O(0;\ 0;\ 0)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin z;\ \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_O = 0;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\cos z;\ \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_O = -1;\ \frac{\partial u}{\partial z} = x\cos z + y\sin z;$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]_O = 0.$$

Следовательно, $(grad u)_O = -\bar{j}$ и наибольшее изменение данной функции направлено по отрицательной полуоси Oy.

599. Найти угол между градиентами функции $z = \arcsin\frac{x}{x+y}$ в точках $A(1;\ 1)$ и $B(3;\ 4)$.

600. Найти значение производной $\frac{\partial u}{\partial l}$ функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $A(1;\ 2;\ 3)$ в направлении вектора $\boldsymbol{AB}$, где $B(2;\ 4;\ 1)$.

Решение. Находим направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{AB}$ (вектора $\boldsymbol{l}$).

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k};\ \left|\boldsymbol{AB}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3;\ \cos\alpha = \frac{1}{3};\ \cos\beta = \frac{2}{3};\ \cos\beta = -\frac{2}{3}.$$

По формуле (7. 13) имеем $\frac{\partial u}{\partial l} = 2x\cos\alpha + 2y\cos\beta + 2z\cos\gamma$ и

$$\left[\frac{\partial u}{\partial l}\right]_A = 2\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{2}{3} + 6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}.$$

601. Найти значение производной $\frac{\partial u}{\partial l}$ функции $u = xy^2 - xyz + z^3$ в точке $A(1;\ 1;\ 2)$ в направлении l, образующем с осями Ox, Oy, Oz соответственно углы 60°, 45°, 60°.

602. Определить направление наибольшего возрастания функции $z = x^2 + xy + 3$ в точке $A(1;\ -1)$.

Решение. Вычислим градиент данной функции в точке A.

$$grad z = (2x+y)\bar{i} + x\bar{j};\quad (grad z)_A = \bar{i} + \bar{j}.$$

Находим направляющие косинусы $grad z$:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}};\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, направление быстрейшего возрастания составляет с осями координат угол в 45°.

7. 7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в точке M_0 называется плоскость, проходящая через эту точку, содержащая все касательные, проведенные через эту точку ко всем кривым, лежащим на этой поверхности и проходящим через точку M_0 .

Если точка $M_O(x_O, y_O, z_O)$ лежит на поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости к этой поверхности в точке M_0 имеет вид

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_O}(x - x_O) + \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_O}(y - y_O) + \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_O}(z - z_O) = 0. \quad (7.\ 14)$$

Нормалью к поверхности в точке M_0 называется перпендикуляр к касательной плоскости, проходящий через точку M_0.

Уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x - x_O}{\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_O}} = \frac{y - y_O}{\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_O}} = \frac{z - z_O}{\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_O}}. \quad (7.\ 15)$$

603. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к конусу $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ в точке $M_O(3;4;5)$.

Решение. Найдем значения частных производных функции $F = x^2 + y^2 - z^2$ в точке M_0.

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$; $\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_O} = 6$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$; $\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_O} = 8$; $\frac{\partial F}{\partial z} = -2z$; $\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_O} = -10$.

По формуле (7. 14) получаем уравнение касательной плоскости:

$$6(x - 3) + 8(y - 4) - 10(z - 5) = 0 \text{ или } 3x + 4y - 5z = 0.$$

По формуле (7. 15) составляем уравнение нормали:

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 4}{4} = \frac{z - 5}{-5}.$$

604. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \dfrac{x^2}{2} + y^2$ в точке $A(2;2;6)$.

605. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ в точке, абсцисса которой $x_o = 3$, а аппликата $z_o = 5$.

606. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 - xyz - 4 = 0$ в точке, абсцисса которой $x_o = 1$, а ордината $y_o = -1$.

7. 8. Частные производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, которые являются дифференцируемыми функциями по переменным x и y, то есть имеющими частные производные второго порядка по этим переменным, которые обозначают следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}.$$

Производные z''_{xy} и z''_{yx} называют *смешанными* производными второго порядка.

Подобным образом определяются частные производные высших порядков.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если функция $z = f(x,y)$ и смешанные частные производные второго порядка непрерывны в точке $P(x,y)$, то в этой точке $z''_{xy} = z''_{yx}$.*

607. Найти частные производные второго порядка функции

$$z = x^3 y - \cos y.$$

Решение. $z'_x = 3x^2 y$; $z'_y = x^3 + sin\, y$; $z''_{xx} = 6xy$; $z''_{yy} = cos\, y$;

$$z''_{xy} = 3x^2; \quad z''_{yx} = 3x^2.$$

В задачах **608 – 610** найти частные производные второго порядка указанных функций.

608. $z = \dfrac{x^2}{1-2y}$. **609.** $z = ln\left(x^2 + y\right)$. **610.** $z = sin^2(ax + by)$.

611. Доказать, что если $z = \dfrac{xy}{x-y}$, то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}.$$

612. Доказать, что если $z = arctgx + x^2 \ln y + xy^3$, то

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}.$$

Решение. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} + 2x\ln y + y^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2x}{y} + 3y^2; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{2x}{y^2} + 6y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + 3xy^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2}{y^2} + 6xy; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial z} = -\frac{2x}{y^2} + 6y.$$

Найденные частные производные третьего порядка совпадают.

7. 9. Экстремум функции нескольких переменных

Функция $z = f(x,y)$ имеет *максимум* (*минимум*) в точке $P_o(x_o,y_o)$, если существует такая окрестность этой точки, в которой выполняется неравенство $f(x_o,y_o) > f(x,y)$ ($f(x_o,y_o) < f(x,y)$).

На рисунках 48 и 49 указаны точки P_o соответственно максимума и минимума (точки *экстремума*) функции $z = f(x,y)$.

Необходимое условие экстремума функции двух переменных состоит в следующем:

Если функция $z = f(x,y)$ имеет в точке $P_o(x_o,y_o)$ экстремум, то ее частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в этой точке равны нулю или хотя бы одна из них не существует.

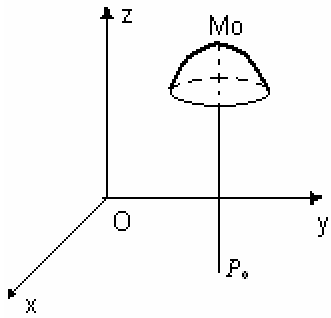


Рис. 48

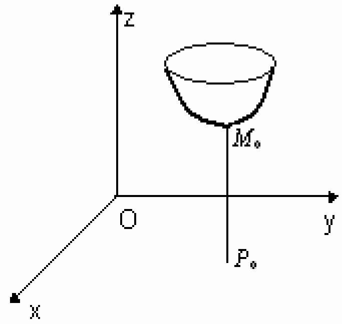


Рис. 49

Точки, в которых $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ или хотя бы одна из частных производных не существует, называются *критическими.*

Достаточное условие экстремума функции двух переменных заключается в следующем:

Пусть $P_o(x_o, y_o)$- критическая точка функции $z = f(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные первого и второго порядков.

Обозначим $\left[z''_{xx}\right]_{P_o} = A$, $\left\lfloor z''_{xy}\right\rfloor_{P_o} = B$, $\left\lfloor z''_{yy}\right\rfloor_{P_o} = C$ *и составим определитель* $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Если $\Delta > 0$, то P_o есть точка экстремума, причем при $A > 0$ – минимума, при $A < 0$ – максимума.

Если $\Delta < 0$, в точке P_o экстремума нет.

При $\Delta = 0$ – требуется дополнительное исследование.

613. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 6x - 2x^2 + y^3 + 9xy - 42.$$

Решение. Находим частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, каждую из них приравняем к нулю и решаем полученную систему уравнений:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6 - 4x + 9y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 9x.$$

Решение системы уравнений $\begin{cases} 6 - 4x + 9y = 0 \\ 3y^2 + 9x = 0 \end{cases}$ дает $x_1 = -12, y_1 = -6,$

$x_2 = -\dfrac{3}{16},\ y_2 = -\dfrac{3}{4}.$

Следовательно, данная функция имеет две критические точки:

$P_1(-12;-6)$, $P_2\left(-\frac{3}{16};-\frac{3}{4}\right)$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = -4 \ , \quad z''_{xy} = 9 \ , \quad z''_{yy} = 6y \, .$$

Для точки P_1 имеем $A = -4$, $B = 9$, $C = -36$, $\Delta = 63$. Так $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в точке $P_1(-12; -6)$ данная функция имеет максимум: $z_{max} = z(-12;-6) = 30$.

Для точки P_2 имеем $A = -4$, $B = 9$, $C = -4{,}5$; $\Delta = -63$. Так как $\Delta < 0$, то в этой точке экстремума нет.

614. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 6xy$.

Решение. Находим стационарные точки.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 6x.$$

Решив систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases}$, имеем две стационарные точки $O(0;0)$ и $P(2;2)$. Находим частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Исследуем найденные стационарные точки.

Для точки $O(0;0)$ имеем: $A = 0$; $B = -6$; $C = 0$. Тогда $\Delta = AC - B^2 = -36 < 0$ и в этой точке экстремума нет.

Для точки $P(2;2)$ имеем: $A = 12$; $B = -6$; $C = 12$. Тогда $\Delta = 144 - 36 = 108 > 0$ и $A = 12 > 0$ и в точке P функция имеет минимум $z_{min} = z(2;2) = -8$.

В задачах **615 – 617** исследовать на экстремум следующие функции:

615. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

616. $z = x^2 + y^2 + 9x - 6y - xy + 20$.

617. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

7. 10. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции нескольких переменных

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D необходимо:

1) найти критические точки функции, принадлежащие этой области и значения функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области D;

3) из полученных в пунктах 1) и 2) результатов выбрать наибольшее и наименьшее значения.

618. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 4xy - 6x - y^2 - 2y$ в треугольнике, ограниченном прямой $2x + 3y - 6 = 0$ и осями координат.

Решение. Находим критические точки данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y - 6; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 2y - 2.$$

Решая систему уравнений $\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ 4x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$,

находим критическую точку $P_0(1; 1)$, лежащую внутри данной области (рис. 50). Находим $z(Po) = z(1;1) = -4$.

Определим наибольшее и наименьшее значения функции на границе данной области, состоящей из тех отрезков: OA, AB, BO.

Для отрезка OA имеем $y = 0$, $0 \le x \le 3$. При $y = 0$ функция $z = x^2 - 6x$ является функцией одной переменной; находим наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке [0, 3].

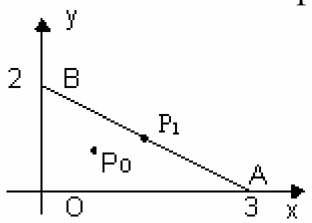


Рис. 50

$\frac{dz}{dx} = 2x - 6$; $2x - 6 = 0$; $x = 3$. Точка $A(3; 0)$ – стационарная. $z(A) = z(3;0) = -9$; $z(O) = z(0;0) = 0$.

Для отрезка AB имеем $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Тогда

$$z = x^2 + 4x\left(-\frac{2}{3}x + 2\right) - 6x - \left(-\frac{2}{3}x + 2\right)^2 - 2\left(-\frac{2}{3}x + 2\right) =$$

$$= -\frac{19}{9}x^2 + 6x - 8.$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке [0, 3].

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{38}{9}x + 6; \quad -\frac{38}{9}x + 6 = 0; \quad x = 1\frac{8}{19}.$$

Точка $P_1\left(1\frac{8}{19};1\frac{1}{19}\right)$ – стационарная, $z(P_1) = z\left(1\frac{8}{19};1\frac{1}{19}\right) = -3\frac{14}{19}$;
$z(B) = z(0;2) = -8$.

Для отрезка BO имеем $x = 0$, $0 \le y \le 2$. Тогда $z = -y^2 - 2y$, где $0 \le y \le 2$.

$$\frac{dz}{dy} = -2y - 2; \quad -2y - 2 = 0; \quad y = -1.$$

Точка (0; −1) не принадлежит данной области.

Сравнение полученных результатов показывает, что наибольшее значение исследуемая функция в данной области достигает в точке $O(0; 0)$, а наименьшее – в точке $A(3; 0)$, то есть $z_{наиб.} = z(0;0) = 0$, $z_{наим.} = z(3;0) = -9$.

619. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2x + 2y^2 - 8y + 5$ в треугольнике, ограниченном прямой $x + y - 4 = 0$ и осями координат.

620. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 4xy - 4$ в квадрате, ограниченном прямыми $x = 4, y = 4$ и осями координат.

621. В треугольнике ABC с вершинами $A(4; -2)$, $B(3; 6)$, $C(-1; -1)$ найти точку, для которой сумма квадратов расстояний до его вершин будет наименьшей.

7. 11. Условный экстремум

Пусть требуется исследовать на экстремум функцию $z = f(x,y)$ при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x,y) = 0$, называемым *уравнением связи.*

Если из уравнения связи выразить переменную y через x и сделать подстановку в данную функцию, то получается функция одной переменной x. Эта функция исследуется на экстремум, найденные при этом значения x подставляют в уравнение связи, в результате имеем точку условного экстремума.

В том случае, когда из уравнения связи нельзя выразить y через x, применяют метод *множителей Лагранжа*, состоящий в следующем:

1) составляется вспомогательная функция Лагранжа

$$\boldsymbol{F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)}; \qquad (7.\ 16)$$

2) находятся частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}$, которые приравниваются нулю и решается система трех уравнений с неизвестными x, y, λ. Решением этой системы будут координаты точек, в которых функция может иметь условный экстремум (но его может и не быть в этих точках, поскольку эта система выражает лишь необходимое условие экстремума).

Пусть задана функция $u=f(x;y;z)$ трех независимых переменных, связанных уравнением $\varphi(x;y;z)=0$. Тогда вспомогательная функция Лагранжа имеет вид

$$\boldsymbol{F(x;y;z;\lambda)=f(x;y;z+\lambda\cdot\varphi(x;y;z)}. \qquad (7.\ 17)$$

Если же переменные x, y, z связаны двумя уравнениями $\varphi_1(x;y;z)=0$ и $\varphi_2(x;y;z)=0$, то функция Лагранжа имеет вид

$$\boldsymbol{F(x;y;z;\lambda_1;\lambda_2)=f(x;y;z)+\lambda_1\cdot\varphi_1(x;y;z)+\lambda_2\cdot\varphi_2(x;y;z)}. \qquad (7.\ 18)$$

622. Исследовать на экстремум функцию $z=2x^2-y^2$ при условии, что переменные x и y связаны уравнением $x+y-2=0$.

Решение. Из уравнения связи имеем $y=2-x$. Подставив это значение y в уравнение функции, получаем $z(x)=2x^2-(2-x)^2=x^2+4x-4$. Нетрудно видеть, что эта функция имеет минимум в точке $x_o=-2$. Следовательно, в точке $P_o(-2;4)$ данная функция имеет условный экстремум – минимум и $z_{min}=z(-2;4)=-8$.

623. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+6x-2y+1$ при условии, что переменные x и y связаны уравнением $y+x^2-4=0$.

Решение. Определим точку условного экстремума, используя метод множителей Лагранжа. Составим вспомогательную функцию Лагранжа

$$F(x;y;\lambda)=x^2+6x-2y+1+\lambda\left(y+x^2-4\right).$$

Находим частные производные первого порядка, приравниваем их нулю.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+6+2\lambda x; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=-2+\lambda; \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y-4.$$

$\begin{cases} 2x+6+2\lambda x=0 \\ -2+\lambda=0 \\ x^2+y-4=0 \end{cases}$. Решением системы являются $x=-1$; $y=3$; $\lambda=2$.

Следовательно, $P_o(-1;3)$ есть точка условного экстремума. В ней данная функция имеет минимум и $z_{min} = -10$.

624. Исследовать на экстремум функцию $u = x^2 + y^2 + z^2$ при условии, что $x^2 + z^2 - y = 0$ и $2x - y + z = 0$.

Решение. По формуле (7. 18) составляем функцию Лагранжа.

$$F(x;y;z;\lambda_1;\lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1\left(x^2 + z^2 - y\right) + \lambda_2(2x - y + z).$$

Находим частные производные первого порядка, приравниваем их нулю.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x^2 + z^2 - y = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 2x - y + z = 0 \end{cases}.$$

Из первого и третьего уравнений получаем соответственно $x = -\dfrac{\lambda_2}{1 + \lambda_1}$; $z = -\dfrac{\lambda_2}{2(1 + \lambda_1)}$. Отсюда $x = 2z$. Тогда из пятого уравнения имеем $y = 5z$. Подстановка в четвертое уравнение дает $4z^2 - 5z + z^2 = 0$; $5z(z - 1) = 0$. Отсюда $z_1 = 0$; $z_2 = 5$. Для найденных значений z находим $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = 2$; $y_2 = 5$.

Имеем две точки условного экстремума: $O(0;0;0)$ и $P(2;5;1)$. В первой точке данная функция имеет минимум и $z_{min} = 0$; во второй точке – максимум и $z_{max} = 30$.

625. Исследовать на экстремум функцию $z = x^m + y^m$ (здесь $m > 1$) при $x + y = 2$ $(x \geq 0\,;\, y \geq 0)$.

7. 12. Обработка экспериментальных данных методом наименьших квадратов

Пусть в результате некоторого эксперимента зависимость между переменными x и y представлена в таблице 1.

Таблица 1

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Задача подбора функции $y=f(x)$, описывающей зависимость между переменными x и y, может быть решена применением *метода наименьших квадратов*, основанного на том, что из множества функциональных зависимостей выбирается та, для которой сумма квадратов отклонений экспериментальных значений от расчетных будет наименьшей.

Вид функции $y=f(x)$ устанавливается или из теоретических соображений, или на основании расположения на плоскости xOy точек, соответствующих экспериментальным данным.

Предположим, что эти точки расположены в достаточной близости от некоторой прямой $y=ax+b$. Неизвестные параметры a и b этой прямой (ее называют линией *регрессии* y на x) находятся решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases} . \qquad (7.\ 19)$$

В случае, если линией регрессии является квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$, то коэффициенты a, b, c находятся решением системы уравнений (7. 20):

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + c\cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases} . \qquad (7.\ 20)$$

626. Значения переменных x и y представлены в таблице 2.

Таблица 2

x	1	2	3	4	5
y	4,5	4	2,5	0,5	1

Используя метод наименьших квадратов, подобрать функцию, описывающую зависимость между этими переменными.

Решение. Для определения вида зависимости между переменными x и y построим точки по данным таблицы (рис. 51).

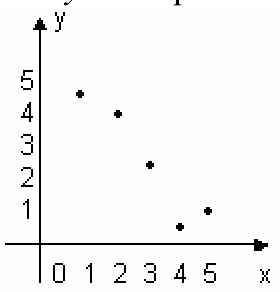


Рис. 51

Из рис. 51 видно, что зависимость между x и y близка к линейной. Для определения параметров a и b прямой $y = ax + b$ составим расчетную таблицу 3 для решения системы уравнений (7. 19).

Таблица 3

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	4,5	1	4,5
2	2	4	4	8
3	3	2,5	9	7,5
4	4	0,5	16	2
5	5	1	25	5
Σ	15	12,5	55	27

Решением системы уравнений $\begin{cases} 55a + 15b = 27 \\ 15a + 5b = 12{,}5 \end{cases}$ являются $a = -1{,}05$, $b = 5{,}65$.

Следовательно, $y = -1{,}05x + 5{,}65$ есть уравнение искомой линейной зависимости.

627. Значения переменных величин x и y, полученные в результате опыта, представлены в таблице

x	2	4	6	8	10
y	5,5	8,5	13,6	17,3	20,1

Предполагая, что эти переменные связаны линейной зависимостью $y = ax + b$, найти методом наименьших квадратов значения параметров a и b.

628. Значения переменных величин x и y, полученные в результате опыта, представлены в таблице

x	0	1	2	3	4
y	5	7	– 4	7	5

Предполагая, что эти переменные связаны квадратичной зависимостью $y = ax^2 + bx + c$, найти методом наименьших квадратов значения параметров a, b, c.

Решение. Для определения параметров a, b, c, входящих в систему уравнений (7. 20), составим таблицу:

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
0	5	0	0	0	0	0
1	7	1	1	1	7	7
2	– 4	4	8	16	– 8	– 16
3	7	9	27	81	21	63
4	5	16	64	256	20	80
$\sum$ 10	20	30	100	354	40	134

Тогда система (7. 20) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 354a + 100b + 30c = 134 \\ 100a + 30b + 10c = 40 \\ 30a + 10b + 5c = 20 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 177a + 50b + 15c = 67 \\ 10a + 3b + c = 4 \\ 6a + 2b + c = 4 \end{cases}.$$

Решением этой системы являются $a = 1$; $b = – 4$; $c = 6$.

Следовательно, искомая зависимость имеет вид $y = x^2 - 4x + 6$.

ГЛАВА 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8. 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции.

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если входящие в него функции зависят от одного аргумента.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной, входящей в это уравнение.

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, обращающая уравнение в тождество.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x,y,y')=0 \qquad (8.\ 1)$$

или (если его можно разрешить относительно y')

$$y'=f(x,y). \qquad (8.\ 2)$$

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y=\varphi(x,C)$, удовлетворяющая этому уравнению при любом значении постоянной *C*.

Если произвольной постоянной *C* придать фиксированное значение C_o, то из общего решения получается *частное решение* $y=\varphi(x,C_o)$.

График любого частного решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.* Общему решению $y=\varphi(x,C)$ соответствует семейство интегральных кривых.

На практике, как правило, частное решение дифференциального уравнения получают из общего решения не фиксацией постоянной *C*, а заданием условий, которым должно удовлетворять искомое частное решение, называемых *начальными условиями*: $y=y_0$ при $x=x_o$ или $y_o=y(x_o)$.

Задача отыскания частного решения уравнения (8. 2), удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши.*

Для уравнения (8. 2) справедлива следующая теорема, называемая теоремой о существовании и единственности решения.

Теорема. *Если в уравнении (*8. 2*) функция* $f(x,y)$ *и ее частная производная* $f_y'(x,y)$ *непрерывны в некоторой области D, содержащей точку* $(x_o;y_o)$*, то существует единственное решение* $y=\varphi(x)$

этого уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

629. Показать, что функция $y = \frac{1}{2}\left(C\sin^2 x - 1\right)$ является общим решением уравнения $y' = (2y+1)ctgx$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Решение. Находим $y' = C\sin x\cos x$ и делаем подстановку y и y' в данное уравнение.

$C\sin x\cos x = \left(C\sin^2 x - 1 + 1\right)ctgx$; $C\sin x\cos x = C\sin^2 x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$;

$C\sin x\cos x \equiv C\sin x\cos x$.

Полученное тождество показывает, что данная функция является решением рассматриваемого уравнения.

Для нахождения частного решения, удовлетворяющего условию $y = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$, подставим эти значения переменных в общее решение: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(C\sin^2\frac{\pi}{4} - 1\right)$. Отсюда $C = 4$ и $y = 2\sin^2 x - \frac{1}{2}$ есть искомое частное решение.

630. Показать, что функция $y = \frac{C}{x}$, где C – постоянная, является общим решением уравнения $y' = -\frac{y}{x}$.

631. Показать, что функция $y = C\ln\cos x$, где C – постоянная, является общим решением уравнения $y' = ctgx$.

632. Показать, что функция $xy + \ln\frac{y}{x} = C$ является общим решением уравнения $y' = \frac{y(1-xy)}{x(1+xy)}$.

633. Показать, что функция $\ln y = C \cdot tg\frac{x}{2}$ является общим решением уравнения $y' \cdot \sin x = y \cdot \ln y$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.

634. Показать, что функция $x^2 - xy + y^2 + C = 0$, где C – постоянная, является общим решением уравнения $(x - 2y)y' = 2x - y$.

8. 1. 1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение первого порядка $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется уравнением с *разделяющимися переменными*, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx+f_2(x)\varphi_2(y)dy=0.$$

В таком уравнении путем деления его членов на $f_2(x)\cdot\varphi_1(y)$ переменные разделяются:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0.$$

Общий интеграл находится почленным интегрированием:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=C, \text{ где } C-\text{const.}$$

Деление на произведение $f_2(x)\cdot\varphi_1(y)$ может привести к потере частных решений. Поэтому нужно решить уравнение $f_2(x)\cdot\varphi_1(y)=0$ и найти те решения, которые не могут быть получены из общего решения. Эти решения называются *особыми* решениями дифференциального уравнения.

635. Найти частное решение уравнения $1+y^2=xyy'$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=0$.

Решение. Заменим $y'=\dfrac{dy}{dx}$ и умножим обе части уравнения на dx:

$$(1+y^2)dx=xydy.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим общий интеграл данного уравнения:

$$\frac{dx}{x}=\frac{ydy}{1+y^2},\quad ln|x|=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{1+y^2}\ ;\quad ln|x|=\frac{1}{2}ln\left|1+y^2\right|+C.$$

Используя указанное начальное условие, подставляем в общий интеграл $x=1$, $y=0$, определяем значение произвольной постоянной:

$ln1=\frac{1}{2}ln1+C$, $C=0$.

При этом значении C из общего интеграла получаем искомое частное решение:

$$ln|x|=\frac{1}{2}ln\left|1+y^2\right| \quad \text{или} \quad 2\,ln|x|=ln\left|1+y^2\right|,\quad x^2=1+y^2.$$

636. Решить уравнение $x\left(y^2-1\right)dx + y\left(x^2-1\right)dy = 0$.

Решение. Делением обеих частей уравнения на $\left(y^2-1\right)\left(x^2-1\right)$ разделяем переменные: $\dfrac{xdx}{x^2-1}+\dfrac{ydy}{y^2-1}=0$. Интегрируем это уравнение:

$$\int\frac{xdx}{x^2-1}+\int\frac{ydy}{y^2-1}=\frac{1}{2}ln\,C; \qquad \frac{1}{2}ln\left|x^2-1\right|+\frac{1}{2}ln\left|y^2-1\right|=\frac{1}{2}ln\,C;$$

$\left|\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\right|=C$ – общее решение уравнения.

При делении на $\left(y^2-1\right)\left(x^2-1\right)$ возможно появление особых решений данного уравнения. Для этого решаем уравнение $\left(y^2-1\right)\left(x^2-1\right)=0$. Его корнями являются $y=\pm1$ и $x=\pm1$, которые могут быть получены из общего решения при $C = 0$.

Следовательно, данное уравнение не имеет особых решений.

В задачах **637 – 640** найти общие интегралы следующих уравнений:

637. $\left(1+y^2\right)dx + y\left(1+x^2\right)dy = 0$. **638.** $xyy' = 1 - x^2$.

639. $y'\cos x - (y+1)\sin x = 0$. **640.** $y'tgx = y$.

В задачах **641 – 645** найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

641. $1+y^2 = xyy'$ при $x = 1, y = 0$.

642. $2\left(1+e^x\right)yy' = e^x$ при $x = 0$, $y = 0$.

643. $\sin y\cos x dy - \cos y \sin x dx = 0$, $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$.

644. $y' = (2y+1)ctgx$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$.

645. $y'\sin x = y\ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

646. Температура нагретого тела в течение 20 мин. падает от 100° до 60°. Через какое время с момента начала охлаждения температура тела понизится до 30°, если температура окружающего воздуха составляет 20° ?

Решение. Пусть $x(t)$ – температура тела в момент времени t. Согласно закону Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Так как скорость изменения температуры тела есть производная $\dfrac{dx}{dt}$, то процесс остывания тела описывается дифференциальным уравнением $\frac{dx}{dt}=k(x-20)$, где $к$ – коэффициент пропорциональности. Решаем это уравнение разделением переменных:

$$\frac{dx}{x-20}=kt\,; \quad \int\frac{dx}{x-20}=\int kdt+ln\,C\,; \quad ln\frac{x-20}{C}=kt\,; \quad \frac{x-20}{C}=e^{kt}\,;$$

$$x=Ce^{kt}+20.$$

Значение постоянной C определим, используя начальное условие $x(0)=100$:

$$100=C\cdot e^{0}+20\,; \quad C=80.$$

Тогда $x=80e^{kt}+20$ является частным решением уравнения остывания тела.

Для определения значения коэффициента $к$ воспользуемся условием $x(20)=60$. Имеем:

$$60=80e^{20k}+20\,; \quad e^{20k}=\frac{1}{2}; \quad e^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}.$$

Подставив найденное значение e^{k} в частное решение, получаем $x=80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}+20$. Это уравнение устанавливает зависимость температуры x тела от времени t его остывания.

Для нахождения искомого времени остывания подставим в последнее уравнение $x=30$:

$$30=80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}+20\,; \quad \frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}; \quad 3=\frac{t}{20}; \quad t=60.$$

Таким образом, температура тела понизится до 30° через 1 час после начала охлаждения.

647. Найти кривую, проходящую через точку $A(-1;1)$ так, чтобы тангенс угла наклона касательной в любой ее точке был равен квадрату ординаты точки касания.

Решение. Исходя из геометрического смысла первой производной угловой коэффициент касательной (тангенс угла ее наклона) равен значению производной в точке касания, имеем дифференциальное уравнение $y'=y^{2}$, откуда $\frac{dy}{dx}=y^{2}$; $\frac{dy}{y^{2}}=dx$; $-\frac{1}{y}=x+C$; $y=-\frac{1}{x+C}$.

Полученное общее решение представляет семейство кривых, из которого нужно выделить кривую, проходящую через данную точку *A*. Для этого подставим координаты точки *A* в общее решение уравнения:

$1 = -\dfrac{1}{-1+C}$, откуда $C = 0$.

Следовательно, $y = -\dfrac{1}{x}$ - уравнение искомой кривой.

648. Решить уравнение $y' = (9x + y - 4)^2$.

Решение. Уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$ подстановкой $t = ax + by + c$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Положим $t = 9x + y - 4$, тогда $t' = 9 + y'$ и $y' = t' - 9$. Данное уравнение принимает вид $t' - 9 = t^2$; $t' = t^2 + 9$; $\dfrac{dt}{dx} = t^2 + 9$; $\dfrac{dt}{t^2 + 9} = dx$.

Интегрируем это уравнение: $\dfrac{1}{3} arctg \dfrac{t}{3} = x + C$;

$\dfrac{1}{3} arctg \dfrac{9x + y - 4}{3} = x + C$;

$arctg \dfrac{9x + y - 4}{3} = 3x + C_1$ - искомое решение.

В задачах **649 – 651** найти общие решения следующих уравнений.

649. $y' = cos(x + y)$. **650.** $y' = \dfrac{1}{3x + y}$.

651. $y' = \sqrt{2x + y - 3}$.

652. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(0; -2)$ так, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке был равен ординате этой точки, увеличенной на три единицы.

653. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и обладающей тем свойством, что отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

654. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(2; 4)$ так, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке был в три раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей эту же точку с началом координат.

655. Скорость распада радия пропорциональна количеству не распавшегося радия. Определить, через сколько лет от 1 кг радия останется 650 г, если известно, что за 1600 лет распадается половина первоначального количества?

656. Химическая реакция, переводящая вещество A в вещество B, протекает так, что в каждый момент времени скорость ее пропорциональна произведению наличных количеств веществ A и B. В начальный момент в реторте содержалось 800 г вещества A и 200 г вещества B. Через два часа вещества A осталось 400 г. Определить, какое количество вещества A будет в реторте через 4 часа.

8. 1. 2. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией* n -го измерения, если $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$, где t – отличное от нуля действительное число.

Если правая часть уравнения $y' = f(x,y)$ есть однородная функция, то уравнение называется *однородным.*

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = xt$, где t - функция переменной x.

657. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x+y}$.

Решение. Правая часть уравнения, функция $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y}$ является однородной функцией нулевого измерения. Действительно,

$f(tx,ty) = \dfrac{ty}{tx+ty} = \dfrac{y}{x+y} = f(x,y)$. Поэтому уравнение является однородным.

Введем подстановку $y = xt$, где t – функция переменной x. Дифференцируя, получим $y' = t + xt'$. Тогда уравнение принимает вид:

$$t + xt' = \frac{xt}{x+xt}\ ;\ t + xt' = \frac{t}{t+1};\ xt' = \frac{t}{t+1} - t;\ xt' = -\frac{t^2}{t+1};\ x\frac{dt}{dx} = -\frac{t^2}{t+1}.$$

Разделяем переменные в последнем уравнении: $\dfrac{(t+1)dt}{-t^2} = \dfrac{dx}{x}$ и интегрируем это равенство:

$$\int \frac{(t+1)dt}{-t^2} = \int \frac{dx}{x}\ ;\ \frac{1}{t} - ln|t| = ln|x| + ln\, C\ ;\ \frac{1}{t} = ln|Cxt|\ .$$

Так как $t = \dfrac{y}{x}$, то $\dfrac{x}{y} = ln|Cy|$ или $x = y\, ln|Cy|$ – общее решение данного уравнения.

658. Решить уравнение $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{xy}$.

Решение. Уравнение является однородным. Делаем подстановку $y = xt$, отсюда $y' = t + xt'$ и данное уравнение принимает вид

$$t + xt' = \frac{x^2t^2 - x^2}{x^2t} \;; \quad xt' = \frac{t^2 - 1}{t} - t \;; \quad x \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t} \;; \quad tdt = -\frac{dx}{x} \;;$$

$$\frac{t^2}{2} = -ln|x| + \frac{1}{2} ln C \;; \quad t^2 = ln\frac{C}{x^2}.$$

Так как $t = \dfrac{y}{x}$, имеем $\dfrac{y^2}{x^2} = ln\dfrac{C}{x^2}$; $y^2 = x^2\, ln\dfrac{C}{x^2}$ – общее решение данного уравнения.

В задачах **659 – 662** найти общее указанных уравнений:

659. $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$. **660.** $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

661. $y' = \dfrac{y + 2\sqrt{xy}}{x}$. **662.** $y' = \dfrac{y^2 + x^2}{xy}$.

663. Составить уравнение кривой, у которой подкасательная равна сумме координат точки касания.

Решение.

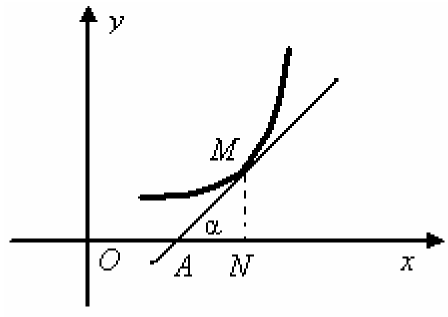


Рис. 52

Проведем к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x; y)$ касательную AM (рис. 52). Проекция AN касательной AM на ось Ox называется *подкасательной* к данной кривой в точке M.

Из прямоугольного треугольника AMN имеем $tg\alpha = \dfrac{MN}{AN}$, где α – угол наклона касательной к оси Ox. Исходя из геометрического смысл производной получаем однородное дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{y}{x + y}$. Решение этого уравнения приведено в № **657**, откуда $x = y\,ln|Cy|$ является искомым уравнением.

664. Составить уравнение кривой, у которой подкасательная равна среднему арифметическому координат точки касания.

665. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $(-1; -1)$, для которой отрезок OA, отсекаемый на оси Ox касательной к кривой в любой ее точке, равен квадрату абсциссы точки касания.

8. 1. 3. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные непрерывные функции, называется *линейным* дифференциальным уравнением первого порядка.

Посредством замены искомой функции y произведением двух вспомогательных функций $u(x)$ и $v(x)$, то есть $y = uv$ линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^n$ называется *уравнением Бернулли.* При $n = 0$ оно является линейным; если $n = 1$, то уравнение Бернулли является уравнением с разделяющимися переменными. Если n – отличное от нуля и единицы число, то подстановкой $t = y^{1-n}$ уравнение сводится к линейному уравнению относительно функции t.

Уравнение Бернулли можно решить и с помощью подстановки $y = uv$.

666. Решить уравнение $y'x\ln x - y = 3x^3 \ln^2 x$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $x\ln x$:

$y' - \dfrac{y}{x\ln x} = 3x^2 \ln x$. Убеждаемся, что оно – линейное. Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение преобразуется к виду

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x\ln x} = 3x^2 \ln x \quad \text{или} \quad u'v + u\left(v' - \frac{v}{x\ln x}\right) = 3x^2 \ln x.$$

Так как искомая функция представима в виде произведения двух вспомогательных функций u и v, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем в качестве v какой-либо частный интеграл уравнения

$$v' - \frac{v}{x\ln x} = 0 . \qquad (1)$$

Тогда для отыскания функции u имеем уравнение

$$u'v = 3x^2 \ln x. \qquad (2)$$

Получаем два уравнения с разделяющимися переменными.

Решаем первое уравнение:

$$\frac{dv}{v}-\frac{dx}{x\,ln\,x}=0\ ,\ \int\frac{dv}{v}-\int\frac{d(ln\,x)}{ln\,x}=0\ ,\ ln|v|-ln|ln\,x|=0,\ ln\left|\frac{v}{ln\,x}\right|=0,$$

$\frac{v}{ln\,x}=1,\ v=ln\,x.$

Подставим $v=ln\,x$ в уравнение (2) и решим его:

$$u'\,ln\,x=3x^2\,ln\,x,\ \frac{du}{dx}=3x^2\ ,\ \int du=\int 3x^2dx+C,\ u=x^3+C.$$

Следовательно, $y=(x^3+C)\,ln\,x$ - общее решение данного уравнения.

667. Решить уравнение $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=1+x^2$.

Решение. Данное уравнение – линейное. Применяем подстановку $y=u\cdot v$. Тогда $y'=u'v+uv'$ и

$$u'v+uv'-\frac{2xuv}{1+x^2}=1+x^2;\qquad v\left(u'-\frac{2xu}{1+x^2}\right)+uv'=1+x^2.$$

Для нахождения функций u и v решаем соответственно уравнения

$$u'-\frac{2xu}{1+x^2}=0\ -\qquad(1)\qquad\text{и}\qquad uv'=1+x^2\ -\qquad(2).$$

Решаем уравнение (1) как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx}=\frac{2xu}{1+x^2};\qquad\frac{du}{u}=\frac{2xdx}{1+x^2};\qquad ln\,u=ln\left(1+x^2\right);\qquad u=1+x^2.$$

Решаем уравнение (2):

$$\left(1+x^2\right)\cdot v'=1+x^2\ ;\qquad v'=1;\qquad v=x+C.$$

Тогда $y=\left(1+x^2\right)\cdot\left(x+C\right)$ есть искомое решение.

В задачах **668 – 670** найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

668. $xy'+y=x+1;\quad y(2)=3.$

669. $y'-ytgx=\frac{1}{cos\,x};\quad y(0)=0.$

670. $y'+y\,cos\,x=sin\,2x;\quad y(0)=-2.$

671. Составить уравнение кривой, проходящей через точку (1; 1), для каждой точки которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен квадрату абсциссы точки касания.

672. Найти частное решение уравнения $y'\,cos^2x+y=tgx$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$.

Решение. Данное уравнение – линейное. Оно может быть решено как применяемой выше постановкой Бернулли $y = u \cdot v$, так и методом вариации произвольной постоянной, который и применим здесь.

Интегрируем соответствующее однородное уравнение $y' cos^2 x + y = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{cos^2 x} \ ; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{cos^2 x} \ ; \quad ln\, y = -tgx + ln\, C \ ; \quad y = Ce^{-tgx} .$$

Решение данного неоднородного уравнения ищем в виде $y = C(x)e^{-tgx}$, где $C(x)$ - искомая функция.

Подставим это решение в данное уравнение, для чего находим

$$y' = C'(x) \cdot e^{-tgx} - C(x) \cdot e^{-tgx} \cdot \frac{1}{cos^2 x} .$$

Имеем

$$cos^2 x \cdot C'(x) \cdot e^{-tgx} - C(x) \cdot e^{-tgx} \cdot \frac{1}{cos^2 x} \cdot cos^2 x + C(x) \cdot e^{-tgx} = tgx \ ;$$

$$C'(x) \cdot cos^2 x \cdot e^{-tgx} = tgx ; \quad C'(x) = \frac{e^{tgx} tgx}{cos^2 x} \ ;$$

$$C(x) = \int \frac{e^{tgx} tgx}{cos^2 x} dx = e^{tgx}(tgx - 1) + C .$$

Тогда $y = \left[e^{tgx}(tgx - 1) + C\right] \cdot e^{-tgx} = tgx - 1 + C \cdot e^{-tgx}$ - общее решение данного уравнения.

Используя начальное условие, имеем $0 = -1 + C$; $C = 1$. Следовательно, $y = tgx - 1 + e^{-tgx}$ - искомое частное решение.

673. Найти частное решение уравнения $y' - ytgx + y^2 cos\, x = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли. Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$ и заданное уравнение примет вид:

$u'v + uv' - uvtgx + u^2v^2 cos\, x = 0$ или $v(u' - utgx) + uv' + u^2v^2 cos\, x = 0$. (1)

Выбираем функцию u так, чтобы выполнялось равенство $u' - utgx = 0$. (*)

Тогда уравнение (1) примет вид $v' + uv^2 cos\, x = 0$. (**)

Решая уравнение (*) как уравнение с разделяющимися переменными, получаем $u = \dfrac{1}{cos\, x}$ и подставляем найденное значение u в (**):

$$v' + v^2 = 0 \text{, откуда } v = \frac{1}{x - C} .$$

Следовательно, $y = \dfrac{1}{(x-C)\cos x}$ - общее решение данного уравнения.

Для выбора частного решения используем начальное условие $y(0)=1$, при котором получаем $C=-1$.

Следовательно, $y = \dfrac{1}{(x+1)\cos x}$ − искомое частное решение.

В задачах **674 – 677** найти общее решение данных уравнений.

674. $y' + xy = xy^3$. **675.** $y' + y = -e^{2x}y^2$.

676. $y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \ln x$. **677.** $xy' - y = x^3y^2$.

8. 2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида $F(x,y,y',y'')=0$ или (если его можно разрешить относительно y'') вида $y''=f(x,y,y')$.

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y=\varphi(x,C_1,C_2)$, обращающая уравнение в тождество при любых значениях постоянных C_1 и C_2.

Решение уравнения второго порядка, получаемое из общего решения при фиксированных значениях постоянных C_1 и C_2, называется *частным решением* уравнения. Частное решение уравнения второго порядка находят из общего его решения заданием начальных условий: $y_o = y(x_o)$, $y'_o = y'(x_o)$.

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется задачей Коши.

8. 2. 1. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. *Уравнения вида* $y''=f(x)$ решают двойным интегрированием правой части, в результате которого решение определяется по формуле

$$\boldsymbol{y = \int \left[\int f(x)dx\right] dx + C_1 x + C_2}. \qquad (8.\,3)$$

678. Решить уравнение $y'' = \sin x + x$.

Решение. По формуле (8. 3) получаем:

$$y=\int\left[\int(\sin x+x)dx\right]dx+C_1x+C_2=\int\left(-\cos x+\frac{x^2}{2}\right)dx+C_1x+C_2=$$

$$=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2.$$

В задачах **679 – 681** найти общее решение данных уравнений:

679. $y''=arctgx$. **680.** $y''=xe^{x}$. **681.** $y''=xe^{-x}$.

682. Найти частное решение уравнения $y''=6x+\sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=2$; $y'(0)=3$.

683. Найти частное решение уравнения $y''=\dfrac{\ln x}{x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=3$; $y'(1)=1$.

2. *Уравнения вида* $y''=f(x,y')$, не содержащие явно функции y, решают подстановкой $y'=p$, где p – функция аргумента x. Тогда $y''=p'$ и рассматриваемое уравнение становится уравнением первого порядка относительно p.

684. Найти общее решение уравнения $y''=\dfrac{y'}{x\ln x}$.

Решение. Правая часть уравнения не содержит явным образом функцию y. Пусть $y'=p$, тогда $y''=p'$. Получаем

$$p'=\frac{p}{x\ln x},\quad \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x\ln x},\quad \int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x\ln x}+\ln C_1,\quad \ln p=\ln(\ln x)+\ln C_1,$$

$$p=C_1\ln x.$$

Так как $p=\dfrac{dy}{dx}$, то $dy=C_1\ln x dx$ и $y=C_1\int\ln x dx+C_2$.

Для вычисления последнего интеграла применим формулу интегрирования по частям. Положим $u=\ln x$, $dv=dx$, тогда $du=\dfrac{dx}{x}$, $v=x$.

Имеем $y=C_1\int\ln x dx+C_2=C_1\left(x\ln x-\int dx\right)+C_2=C_1x(\ln x-1)+C_2-$ общее решение данного уравнения.

685. Найти частное решение уравнения $y''=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{y'}{x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=1$, $y'(1)=2$.

Решение. Пусть $y'=p$, тогда $y''=p'$ и данное принимает вид

$p' = \frac{1}{x^2} - \frac{p}{x}$ или $p' + \frac{p}{x} = \frac{1}{x^2}$. Это линейное уравнение первого порядка, для его решения применяем подстановку $p = u \cdot v$, в результате чего получаем общее решение $p = \frac{ln\,x}{x} + \frac{C_1}{x}$ или $y' = \frac{ln\,x}{x} + \frac{C_1}{x}$. Интегрируя это равенство, имеем $y = \frac{ln^2 x}{2} + C_1\,ln\,x + C_2$.

Используя начальные условия, находим значения постоянных $C_1 = 2$, $C_2 = 1$.

Тогда $y = \frac{ln^2 x}{2} + 2\,ln\,x + 1$ - искомое частное решение.

В задачах **686 – 691** найти общее решение данных уравнений:

686. $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' = 2$. **687.** $y'' = -\frac{y'}{x} - 1$.

688. $y'' = -\frac{y'}{x}$. **689.** $y'' = \frac{y'}{x} + xe^x$.

690. $\left(1 + x^2\right)y'' + 2xy' = x^3$. **691.** $y'' = \frac{y'}{x\,ln\,x}$.

3. *Уравнения вида* $y'' = f\left(y, y'\right)$, не содержащие явно переменной *x*, решаются подстановкой $y' = p$, где *p* – функция от *y*. Отсюда $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$ и уравнение сводится к уравнению первого порядка.

692. Найти частное решение уравнения $y''y^3 - 1 = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Решение. Данное уравнение явным образом не содержит аргумент *x*. Пусть $y' = p$, где *p*- некоторая функция от *y*. Тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$ и уравнение принимает вид

$$p\frac{dp}{dy}y^3 = 1, \quad pdp = y^{-3}dy.$$

Интегрируя, получаем

$\frac{p^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C_1$, $\frac{(y')^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C_1$. Так как $y'(0) = 1$, имеем

$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + C_1$, откуда C_1 = 1. Тогда $\frac{(y')^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + 1$ или

$(y')^2 = \frac{2y^2 - 1}{y^2}$; $y' = \frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{y}$.

Разделив переменные в последнем уравнении, имеем $\frac{ydy}{\sqrt{2y^2 - 1}} = dx$.

Интегрируя последнее равенство, получаем общее решение данного уравнения:

$$\frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{2} = x + C_2 .$$

Используя начальное условие $y(0) = 1$, находим $C_2 = \frac{1}{2}$.

Тогда

$$\sqrt{2y^2 - 1} = 2x + 1, \quad 2y^2 - 1 = (2x + 1)^2, \quad y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

− искомое частное решение данного уравнения.

В задачах **693 – 698** найти общее решение данных уравнений.

693. $yy'' = (y')^2$. **694.** $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$.

695. $2yy'' = 1 + (y')^2$. **696.** $(1 - y)y'' + 2(y')^2 = 0$.

697. $(2y + 3)y'' - 2(y')^2 = 0$. **698.** $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$.

В задачах **699 – 701** найти частное решение уравнений, удовлетворяющее данным начальным условиям.

699. $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

700. $y^3 y'' + 1 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

701. $(x^2 + 1)y'' = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

8. 2. 2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Уравнение $y'' + py' + qy = 0$ (1), где p и q – действительные числа, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Общее решение уравнения (1) находится с помощью *характеристического уравнения* $k^2 + pk + q = 0$, получаемого из данного уравнения (1), если сохраняя в нем коэффициенты p и q, заменить функцию y единицей, а все ее производные соответствующими степенями κ.

При этом:

1) Если корни κ_1 и κ_2 характеристического уравнения *действительные различные*, то общее решение уравнения (1) выражается формулой

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{8. 4}$$

2) Если характеристическое уравнение имеет действительные равные корни $\kappa_1 = \kappa_2$, то общее решение уравнения (1) выражается формулой

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}. \tag{8. 5}$$

3) Если характеристическое уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то общее решение уравнения (1) есть

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x). \tag{8. 6}$$

702. Найти частное решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 6,\ y'(0) = 10$.

Решение. Для нахождения общего решения данного уравнения составляем характеристическое уравнение $\kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0$, имеющее корнями числа $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 3$. По формуле (8. 4) общим решением данного уравнения является функция $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

Используя начальные условия, определяем значения постоянных C_1 и C_2. Подставляя в общее решение заданные значения $x = 0$, $y = 6$ (первое начальное условие), получим $6 = C_1 + C_2$.

Дифференцируя общее решение уравнения, имеем $y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$ и подставляя в полученное выражение $x = 0$, $y' = 10$ (второе начальное условие), получаем второе уравнение с неизвестными C_1 и C_2: $10 = C_1 + 3C_2$.

Решая полученную систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6 \\ C_1 + 3C_2 = 10 \end{cases}, \text{ находим } C_1 = 4,\ C_2 = 2 .$$

Подставляя значения $C_1 = 4$ и $C_2 = 2$ в общее решение уравнения, получим искомое частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y = 4e^x + 2e^{3x} .$$

703. Найти общее решение уравнения $y'' + 16y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 16 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 4i$.

Подставляя в формулу (8. 6) $\alpha = 0, \beta = 4$, получаем общее решение данного уравнения:

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x .$$

В задачах **704 – 709** найти общее решение данных уравнений:

704. $y'' - 5y' + 6y = 0$. **705.** $y'' + 4y' + 4y = 0$.

706. $y'' - 3y' - 4y = 0$. **707.** $y'' + 9y = 0$.

708. $y'' - 4y' + 13y = 0$. **709.** $y'' + 2y' = 0$.

В задачах **710 – 678** найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

710. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

711. $y'' - 5y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -5$.

712. $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

713. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(\pi) = -2$, $y'(\pi) = -3$.

8. 2. 3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Общее решение y неоднородного уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ равно сумме общего решения $y_{одн}$ однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ и какого-нибудь частного решения $\overline{y}$ неоднородного уравнения, то есть $y = y_{одн} + \overline{y}$.

Для некоторых специальных видов функций $f(x)$ частное решение $\overline{y}$ можно найти методом неопределенных коэффициентов в следующих случаях.

***Случай* 1.** Пусть $f(x) = p(x)$, где $p(x)$ - многочлен степени *n.*

Тогда $\overline{y} = Q(x)$, где $Q(x)$ - многочлен степени n, если число 0 не является корнем характеристического уравнения. Если же 0 – корень кратности r характеристического уравнения, то $\overline{y} = x^r \cdot Q(x)$.

***Случай* 2.** $f(x) = ae^{mx}$, где a, m – действительные числа.

Тогда $\overline{y} = Ae^{mx}$, если число m не является корнем характеристического уравнения. Если же число m есть корень кратности r характеристического уравнения, то $\overline{y} = Ax^r e^{mx}$.

Здесь A – подлежащий определению коэффициент.

***Случай* 3.** $f(x) = e^{mx} \cdot p(x)$, где $p(x)$ - многочлен степени n.

Тогда $\overline{y} = e^{mx} \cdot Q(x)$, если число m – не корень характеристического уравнения и $\overline{y} = x^r e^{mx} Q(x)$, если число m является корнем кратности r характеристического уравнения. Здесь $Q(x)$ - многочлен степени n, коэффициенты которого нужно определить.

***Случай* 4.** $f(x) = e^{mx}(a\cos nx + b\sin nx)$.

В этом случае $\overline{y} = e^{mx}(A\cos nx + B\sin nx)$, если числа $m \pm ni$ не являются корнями характеристического уравнения и
$\overline{y} = xe^{mx}(A\cos nx + B\sin nx)$, если числа $m \pm ni$ есть корни характеристического уравнения.

***Случай* 5.** $f(x) = e^{mx}[p_1(x)\cos nx + p_2(x)\sin nx]$, где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ – многочлены.

Тогда $\overline{y} = e^{mx}[Q_1(x)\cos nx + Q_2(x)\sin nx]$, если числа $m \pm ni$ не являются корнями характеристического уравнения и
$\overline{y} = xe^{mx}[Q_1(x)\cos nx + Q_2(x)\sin nx]$, если числа $m \pm ni$ есть корни характеристического уравнения.

Здесь $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ - многочлены, степень которых равна большей из степеней многочленов $p_1(x)$ и $p_2(x)$.

***Случай* 6.** $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Тогда $\overline{y} = \overline{y_1} + \overline{y_2}$, где $\overline{y_1}$ и $\overline{y_2}$ есть соответственно частные решения уравнений $y'' + py' + qy = f_1(x)$ и $y'' + py' + qy = f_2(x)$.

Выше даны рекомендации по отысканию частного решения $\overline{y}$ неоднородного уравнения лишь для функций, приведенных в *случаях* 1 – 6.

Если же правая часть неоднородного уравнения есть функция другой структуры, то для отыскания $\overline{y}$ используется *метод вариации произвольных постоянных*, состоящий в следующем.

Пусть общим решением однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ является функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ − линейно независимые решения этого уравнения; C_1 и C_2 – постоянные величины.

Частное решение неоднородного уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ ищется в виде $\overline{y} = C_1(x) y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находятся решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}. \qquad (8.\ 7)$$

714. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

Решение. Находим общее решение однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -2$, $k_2 = 1$. Тогда $y_{одн} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$.

Найдем частное решение $\overline{y}$ данного неоднородного уравнения. Его правая часть есть функция $f(x) = 6x^2$. Согласно *случаю* 1, так число 0 не является корнем характеристического уравнения, $\overline{y}$ есть многочлен второй степени, то есть $\overline{y} = Ax^2 + Bx + C$. Отсюда находим $\overline{y}' = 2Ax + B$, $\overline{y}'' = 2A$ и, подставляя $\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ в данное уравнение, получаем тождество

$2A + 2Ax + B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C \equiv 6x^2$ или

$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + 2A + B - 2C \equiv 6x^2$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства (только при этом условии оно будет тождеством) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -2A = 6 \\ 2A - 2B = 0 \\ 2A + B - 2C = 0 \end{cases}$$

, из которой находим $A = -3$, $B = -3$, $C = -4{,}5$.

Следовательно, $\bar{y} = -3x^2 - 3x - 4{,}5$ и искомым общим решением данного неоднородного уравнения является
$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - 3x^2 - 3x - 4{,}5$.

715. Решить уравнение $y'' - 4y = xe^{-x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 2$. Поэтому $y_{одн} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$. Частным решением данного неоднородного уравнения является функция $\bar{y} = (Ax + B)e^{-x}$ (в соответствии со *случаем* 3, так как $m = -1$ не является корнем характеристического уравнения).

Находим $\bar{y}' = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = (A - B)e^{-x} - Axe^{-x}$,

$\bar{y}'' = -(A - B)e^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} = (B - 2A)e^{-x} + Axe^{-x}$.

Подставим $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в данное уравнение:

$$(B - 2A)e^{-x} + Axe^{-x} - 4(Ax + B)e^{-x} \equiv xe^{-x};$$

$$(B - 2A + Ax - 4Ax - 4B)e^{-x} \equiv xe^{-x}; \qquad -2A - 3B - 3Ax \equiv x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего тождества, получаем систему уравнений для определения A и B:

$$\begin{cases} -3A = 1 \\ 2A - 3B = 0 \end{cases}, \text{ откуда } A = -\frac{1}{3},\ B = \frac{2}{9}.$$

Следовательно, $\bar{y} = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right)e^{-x} = \frac{1}{9}(2 - 3x)e^{-x}$.

Значит, $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{9}(2 - 3x)e^{-x}$.

716. Найти частное решение уравнения
$y'' - 2y' + y = 9e^{-2x} + 2x - 4$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет равные корни $k_1 = k_2 = 1$, поэтому $y_{одн} = C_1 e^{x} + C_2 xe^{x}$.

Правая часть данного уравнения есть сумма показательной функции $9e^{-2x}$ и многочлена первой степени $2x - 4$ (*случай* 6). Так числа

-2 и 0 не являются корнями характеристического уравнения, то $\bar{y} = Ae^{-2x} + Bx + C$.

Подставляя $\bar{y}$, $\bar{y}' = -2Ae^{-2x} + B$, $\bar{y}'' = 4Ae^{-2x}$ в данное уравнение, имеем:

$$4Ae^{-2x} + 4Ae^{-2x} - 2B + Ae^{-2x} + Bx + C \equiv 9e^{-2x} + 2x - 4.$$

Приравнивая коэффициенты подобных членов обеих частей этого тождества, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 9A = 9 \\ B = 2 \\ -2B + C = -4 \end{cases}, \text{ откуда } A = 1,\ B = 2,\ C = 0.$$

Следовательно, $\bar{y} = e^{-2x} + 2x$ и общим решением данного уравнения является функция $y = C_1e^x + C_2xe^x + e^{-2x} + 2x$.

Используя начальные условия, определим значения постоянных C_1 и C_2. Так как $y(0) = 1$, то $C_1+1=1$, $C_1=0$.

Находим производную $y' = C_1e^x + C_2e^x + C_2xe^x - 2e^{-2x} + 2$. Тогда $C_1 + C_2 - 2 + 2 = 1$, $C_1 + C_2 = 1$, $C_2 = 1$.

Итак, $y = xe^x + e^{-2x} + 2x$ − искомое частное решение.

717. Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' + 10y = 6\cos 2x + 4\sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 10 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 1 \pm 3i$ и общим решением однородного уравнения является $y_{одн.} = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

Частное решение $\bar{y}$ данного неоднородного уравнения в соответствии со *случаем* 4 (при $m = 0$, $n = 2$ числа $m \pm ni = \pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения) является функция $\bar{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$. Подставляя функцию $\bar{y}$ и ее производные $\bar{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$ и $\bar{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$ в данное уравнение, получаем тождество

$$(6A - 4B)\cos 2x + (6B + 4A)\sin 2x \equiv 6\cos 2x + 4\sin 2x.$$

Отсюда имеем систему уравнений $\begin{cases} 6A - 4B = 6 \\ 4A + 6B = 4 \end{cases}$, решением которой являются $A = 1$, $B = 0$.

Следовательно, $\bar{y} = \cos 2x$ и общим решением данного уравнения является $y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \cos 2x$.

Найдем значения произвольных постоянных C_1 и C_2, используя начальные условия. Подставив в общее решение $x = 0$, $y = 1$ (первое начальное условие), получаем

$$1 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + \cos 0 \text{ или } 1 = C_1 + 1,\ C_1 = 0.$$

Чтобы воспользоваться вторым начальным условием, дифференцируем общее решение уравнения:

$$y' = e^x[(C_1 + 3C_2)\cos 3x + (C_2 - 3C_1)\sin 3x] - 2\sin 2x.$$

Подставив в это выражение $x = 0$, $y' = 6$ (второе начальное условие), имеем $C_1 + 3C_2 = 6$. Тогда $C_2 = 2$ и $y = 2e^x \sin 3x + \cos 2x$ – искомое частное решение.

718. Решить уравнение $y'' - 3y' = x + \cos x$.

Решение. Находим общее решение однородного уравнения $y'' - 3y' = 0$. Корнями характеристического уравнения $к^2 - 3к = 0$ являются числа 0 и 3, поэтому $y_{одн.} = C_1 + C_2 e^{3x}$.

Правая часть данного уравнения есть сумма многочлена первой степени и функции $\cos x$. Так как число 0 является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения $y'' - 3y' = x$ следует искать в виде $x(Ax + B)$. Частное решение уравнения $y'' - 3y' = \cos x$ имеет вид $C\cos x + D\sin x$. Тогда частное решение данного уравнения (*случай* 6) имеет вид $\bar{y} = x(Ax + B) + C\cos x + D\sin x$.

Дважды дифференцируя $\bar{y}$, имеем:

$$\bar{y}' = 2Ax + B - C\sin x + D\cos x; \qquad \bar{y}'' = 2A - C\cos x - D\sin x.$$

Делая подстановку в данное уравнение, получаем тождество

$$-6Ax + (2A - 3B) + (-C - 3D)\cos x + (3C - D)\sin x \equiv x + \cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в обеих частях этого тождества, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -6A = 1 \\ 2A - 3B = 0 \\ -C - 3D = 1 \\ 3C - D = 0 \end{cases}.$$

Ее решением является $A = -\dfrac{1}{6}$; $B = -\dfrac{1}{9}$; $C = -0{,}1$; $D = -0{,}3$.

Следовательно, $\bar{y} = x\left(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\right) - 0{,}1\cos x - 0{,}3\sin x$ и

$y = C_1 + C_2 e^{3x} + x\left(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\right) - 0{,}1\cos x - 0{,}3\sin x$ есть общее решение данного уравнения.

В задачах **719 – 737** найти общее решение данных уравнений.

719. $y'' - 3y' = 2 - 6x$.

720. $y'' - y' - 6y = 12x^2 - 2x + 1$.

721. $y'' + 2y' - 3y = 6x$.

722. $y'' + y' = 6x^2 - 7$.

723. $y'' - 7y' + 10y = 4e^{3x}$.

724. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

725. $y'' + 5y' = e^{-5x}$.

726. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}$.

727. $y'' + 9y = 12\cos 3x + 18\sin 3x$.

728. $y'' + 4y = 4\cos 2x - 12\sin 2x$.

729. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$.

730. $y'' + 6y' + 13y = 30\sin x$.

731. $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}\sin x$.

732. $y'' - y' = 2x\sin x$.

733. $y'' + y' = 4x\cos x$.

734. $y'' - 3y' + 2y = x + 1 - e^{-2x}$.

735. $y'' + y' = \sin x - 2e^{-x}$.

736. $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x} + e^{-x}$.

737. $y'' - 4y' + 4y = 2x + 2\sin 2x$.

В задачах **738 – 744** найти частные решения уравнений, удовлетворяющих указанным начальным условиям.

738. $y'' + 4y = 8x$; $\quad y(0) = 0$; $\quad y'(0) = 4$.

739. $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$; $\quad y(0) = 2$; $\quad y'(0) = 13$.

740. $y'' + 4y = \sin x$; $\quad y(0) = 1$; $\quad y'(0) = 1$.

741. $y'' + 4y = 4\sin 2x - 8\cos 2x$; $\quad y(0) = 0$; $\quad y'(0) = 0$.

742. $y'' - y' = -5e^{-x}(\cos x + \sin x)$; $\quad y(0) = -4$; $\quad y'(0) = 5$.

743. $2y'' - 3y' + y = 2x + \sin x$; $\quad y(0) = 0$; $\quad y'(0) = 0{,}5$.

744. $y'' + 2y' + 4y = 2x + 3e^{2x}$; $\quad y(0) = 1$; $\quad y'(0) = \sqrt{3}$.

745. Найти общее решение уравнения $y'' + y = tg^2 x$.

Решение. Здесь применим метод вариации произвольных постоянных.

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $\kappa_{1,2} = \pm\, i$. Поэтому $y_{одн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

В нашем случае $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ – два линейно независимые частные решения однородного уравнения.

Для определения частного решения $\overline{y} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ данного уравнения составим и решим по формулам Крамера следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = tg^2 x \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ tg^2 x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^3 x}{\cos x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & tg^2 x \end{vmatrix} = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Имеем $C_1'(x) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\dfrac{\sin^3 x}{\cos x}$, $C_2'(x) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$.

Отсюда

$$C_1(x) = \int -\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}d(\cos x) = \ln|\cos x| - \frac{1}{2}\cos^2 x.$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx = \int \frac{dx}{\cos x} - \sin x.$$

Так как $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}-1}\right| = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ (вычисляется подстановкой $tg\dfrac{x}{2} = t$), то $C_2(x) = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x$.

Тогда $\overline{y} = \left(\ln|\cos x| - \dfrac{1}{2}\cos^2 x\right)\cos x + \left[\ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x\right]\sin x$ и

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \left(\ln|\cos x| - \frac{1}{2}\cos^2 x\right)\cos x + \left[\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x\right]\sin x$$

является общим решением данного уравнения.

746. Решить уравнение $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет корни $\kappa_{1,2} = \pm 2i$. Поэтому $y_{одн} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$, где $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$.

Для определения частного решения $\bar{y}=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ = $=C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x$ данного уравнения составляем систему уравнений (8. 7), где $y_1'(x)=-2\sin 2x$, $y_2'(x)=2\cos 2x$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0 \\ -2C_1'(x)\sin 2x+2C_2'(x)\cos 2x=\dfrac{1}{\sin^2 x} \end{cases}.$$

Полученную систему уравнений относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ решим по формулам Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}=2\cos^2 2x+2\sin^2 2x=2\,;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\sin^2 x} & 2\cos 2x \end{vmatrix}=-\frac{\sin 2x}{\sin^2 x}=-\frac{2\cos x}{\sin x}\,;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\sin^2 x} \end{vmatrix}=\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}=\frac{1-2\sin^2 x}{\sin^2 x}.$$

Имеем $C_1'(x)=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{\cos x}{\sin x}$, $C_2'(x)=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{1-2\sin^2 x}{2\sin^2 x}$.

Отсюда

$$C_1(x)=\int -\frac{\cos x}{\sin x}dx=-\ln|\sin x|\;;$$

$$C_2(x)=\int\frac{1-2\sin^2 x}{2\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{2\sin^2 x}-1\right)=-\frac{1}{2}ctgx-x.$$

Тогда $\bar{y}=-\ln|\sin x|\cos 2x-\left(\dfrac{1}{2}ctgx+x\right)\sin 2x$ и

$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\ln|\sin x|\cos 2x-\left(\dfrac{1}{2}ctgx+x\right)\sin 2x$ есть искомое решение данного уравнения.

В задачах **747 – 750** решить уравнения, пользуясь методом вариации произвольных постоянных.

747. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$. **748.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$.

749. $y''+y=ctgx$. **750.** $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$.

8. 3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Решение линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$$

порядка $n > 2$ проводится аналогично решению соответствующего уравнения второго порядка.

751. Решить уравнение $y''' - 5y'' + 6y' = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение и находим его корни: $k^3 - 5k^2 + 6k = 0$; $k\left(k^2 - 5k + 6\right) = 0$; $k_1 = 0$; $k_2 = 2$; $k_3 = 3$.

Корни действительные различные, поэтому

$$y_{одн.} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

752. Найти частное решение уравнения $y''' + y'' - y' - y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 5$; $y'(0) = -2$; $y''(0) = 7$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^3 + k^2 - k - 1 = 0 \quad ; \quad (k-1)(k+1)^2 = 0 \quad ; \quad k_1 = 1 \quad ; \quad k_2 = k_3 = -1.$$

Так два корня равны между собой, то

$$y_{одн.} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}.$$

Для нахождения значений постоянных C_1, C_2, C_3 дважды дифференцируем найденное общее решение:

$$y'_{одн.} = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x} - C_3 x e^{-x} \;;$$

$$y''_{одн.} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 e^{-x} - C_3 e^{-x} + C_3 x e^{-x}.$$

Делая подстановку в $y_{одн.}$, $y'_{одн.}$, $y''_{одн.}$ заданных начальных условий, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ C_1 - C_2 + C_3 = -2 \\ C_1 + C_2 - -2C_3 = 7 \end{cases},$$

решением которой являются $C_1 = 2$; $C_2 = 3$; $C_3 = -1$.

Тогда $y_{одн.} = 2e^x + 3e^{-x} - xe^{-x}$ - искомое частное решение.

В задачах **753 – 756** найти общее решение данных уравнений.

753. $y''' + 2y'' + y' = 0$. **754.** $y''' - 6y'' + 13y' = 0$.

755. $y''' - 4y'' + 4y' = 0$. **756.** $y''' - 8y = 0$.

757. Решить уравнение $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

Решение. Общее решение данного неоднородного уравнения есть

$$y = y_{одн} + \overline{y}.$$

Составим и решим соответствующее характеристическое уравнение: $k^3 - k^2 + k - 1 = 0$, $(k-1)(k^2+1) = 0$. Его корни есть $k_1 = 1$, $k_{2,3} = \pm i$.

Тогда

$$y_{одн} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Частное решение $\overline{y} = Ax^2 + Bx + C$, так число 0 не является корнем характеристического уравнения.

Находим $\overline{y}' = 2Ax + B$, $\overline{y}'' = 2A$, $\overline{y}''' = 0$ и осуществляем подстановку в данное уравнение:

$$0 - 2A + 2Ax + B - Ax^2 - Bx - C \equiv x^2 + x;$$

$$-Ax^2 + (2A - B)x + (-2A + B - C) \equiv x^2 + x.$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -A = 1 \\ 2A - B = 1 \\ -2A + B - C = 0 \end{cases}, \text{ откуда } A = -1,\ B = -3,\ C = -1.$$

Следовательно,

$$\overline{y} = -x^2 - 3x - 1 \quad \text{и} \quad y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1.$$

758. Найти частное решение уравнения $y^{(4)} - y = 8e^x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = 1$; $y'''(0) = 1$.

Решение. Находим общее решение однородного уравнения $y^{(4)} - y = 0$. Характеристическое уравнение $k^4 - 1 = 0$ имеет четыре корня: $k_1 = 1$; $k_2 = -1$; $k_3 = i$; $k_4 = -i$.

Тогда

$$y_{одн.} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Частное решение ищем в виде $\bar{y} = Axe^x$. Дифференцируя $\bar{y}$ четыре раза, имеем: $\bar{y}^{(4)} = Ae^x(x+4)$.

Для определения коэффициента A делаем подстановку в данное уравнение: $Ae^{x}(x+4)-Axe^{x}\equiv 8e^{x}$. Отсюда $A=2$ и $\bar{y}=2xe^{x}$.

Общим решением данного уравнения является

$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x+2xe^{x}$.

Для нахождения значений постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 трижды дифференцируем общее решение уравнения:

$$y'=C_1e^{x}-C_2e^{-x}-C_3\sin x+C_4\cos x+2e^{x}(1+x);$$

$$y''=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x+2e^{x}(2+x);$$

$$y'''=C_1e^{x}-C_2e^{-x}+C_3\sin x-C_4\cos x+2e^{x}(3+x).$$

Используя начальные условия, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1+C_2+C_3=-1 \\ C_1-C_2+C_4+2=0 \\ C_1+C_2-C_3+4=1 \\ C_1-C_2-C_4+6=0 \end{cases},$$

решением которой являются $C_1=-3$; $C_2=1$; $C_3=1$; $C_4=2$.

Следовательно, $y=-3e^{x}+e^{-x}+\cos x+2\sin x+2xe^{x}$ есть искомое частное решение.

759. Найти частное решение уравнения $y'''+y'=e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$; $y'(0)=0$; $y''(0)=0$.

В задачах **760 – 764** найти общее решение данных уравнений.

760. $y'''-2y''+y'=x^2$.

761. $y'''-3y''+3y'-y=e^{x}$.

762. $y'''-y''-4y'+4y=x^2+3$.

763. $y^{(4)}-y=4\cos x$.

764. $y'''+y''=6x+e^{-x}$.

8. 4. Системы линейных дифференциальных уравнений

765. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3y-8x+5e^{-t} \\ \dfrac{dy}{dx}=7y-18x+12e^{-t} \end{cases},$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=0$; $y(0)=-3$.

Решение. Для решения данной системы применим *метод исключения*, состоящий в дифференцировании одного из уравнений системы и исключении всех неизвестных, кроме одного.

Продифференцируем по переменной t обе части первого уравнения системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dy}{dt} - 8\frac{dx}{dt} - 5e^{-t}.$$

Заменим в этом уравнении $\frac{dy}{dt}$ правой частью второго уравнения системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\left(7y - 18x + 12e^{-t}\right) - 8\frac{dx}{dt} - 5e^{-t} \ ;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8\frac{dx}{dt} - 54x + 21y + 31e^{-t}. \qquad (1)$$

Из первого уравнения системы находим y:

$$y = \frac{1}{3}\left(\frac{dx}{dt} + 8x - 5e^{-t}\right). \qquad (2)$$

Подставим найденное выражение для y в уравнение (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = -4e^{-t}. \qquad (3)$$

Решаем неоднородное дифференциальное уравнение (3). Его характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -2$ и $k_2 = 1$, поэтому $x_{одн.} = C_1e^{-2t} + C_2e^t$. Частное решение уравнения (3) имеет вид $\bar{x} = Ae^{-t}$. В результате подстановки $\bar{x}$ в уравнение (3) находим $A = 2$. Тогда общее решение уравнения (3) имеет вид

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t + 2e^{-t}. \qquad (4)$$

Отсюда $\frac{dx}{dt} = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^t - 2e^{-t}$.

Подставим найденное значение $\frac{dx}{dt}$ и выражение (4) в (2), получим

$y = 2C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^t + 3e^{-t}$.

Итак, $x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t + 2e^{-t}$ и $y = 2C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^t + 3e^{-t}$ являются общим решением данной системы дифференциальных уравнений.

Для нахождения частного решения системы используем заданные начальные условия, приводящие к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 0 \\ 2C_1 + 3C_2 + 3 = -3 \end{cases}.$$

Решением этой системы являются $C_1 = 0$; $C_2 = -2$.

Следовательно, $x = -2\,e^t + 2e^{-t}$ и $y = -6e^t + 3e^{-t}$ являются искомыми частными решениями данной системы дифференциальных уравнений.

В задачах **766 – 769** найти частные решения систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющих указанным начальным условиям:

766. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = 0$; $y(0) = 1$.

767. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + e^{3t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5e^{3t} \end{cases}$, $x(0) = 2$; $y(0) = 3$.

768. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$, $x(0) = 2$; $y(0) = 0$.

769. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + \cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3\sin t \end{cases}$, $x(0) = 2$; $y(0) = -4$.

770. Найти частное решение системы уравнений

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{2x + 3y} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{2x + 3y} \end{cases}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = 1 \;;\quad y(0) = 2.$$

Решение. Для решения данной системы применим метод *интегрируемых комбинаций.*

Составим первую интегрируемую комбинацию: разделим первое уравнение системы на второе. Имеем

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}\ ; \qquad \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\ ; \qquad ln\,x=ln\,y+ln\,C_1\ ; \qquad x=C_1\,y\,.$$

Составляем вторую интегрируемую комбинацию: сложим удвоенное первое уравнение системы с утроенным вторым. Получаем

$$2\frac{dx}{dt}+3\frac{dy}{dt}=1\ ; \quad 2dx+3dy=dt\ ; \quad 2x+3y=t+C_2\,.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} x=C_1\,y \\ 2x+3y=t+C_2 \end{cases}$ находим следующее общее решение данной системы уравнений:

$$x=\frac{C_1(t+C_2)}{2C_1+3}\ ; \quad y=\frac{t+C_2}{2C_1+3}\ .$$

Используя начальные условия, имеем $1=\frac{C_1C_2}{2C_1+3}\ ; \quad 2=\frac{C_2}{2C_2+3}$, откуда $C_1=\frac{1}{2}\ ; \quad C_2=8\,.$

Тогда $x=\frac{t}{8}+1\ ; \quad y=\frac{t}{4}+2$ – искомое частное решение.

ГЛАВА 9. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

9. 1. Двойной интеграл

Двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области D называется предел при $max\, d_i \to 0$ интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ и обозначается $\iint_D f(x, y)dS$, то есть $\iint_D f(x,y)dS = \lim\limits_{max\, d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$.

В прямоугольной системе координат, если область D есть прямоугольник, ограниченный прямыми $x = a, x = b, y = c, y = d$, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx. \quad (9.\ 1)$$

Если же область D ограничена контуром произвольной конфигурации и координаты каждой ее точки удовлетворяют неравенствам:

$a \le x \le b$, $\alpha(x) \le y \le \beta(x)$, то $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$. (9. 2)

В полярной системе координат, если область D определена неравенствами $\alpha \le \varphi \le \beta$, $\delta(\varphi) \le r \le \gamma(\varphi)$, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\delta(\varphi)}^{\gamma(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \quad (9.\ 3)$$

771. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^2 + 2y)dxdy$, если область D есть прямоугольник, ограниченный прямыми *x=2, x=4, y=0, y=3.*

Решение. По формуле (9. 1) имеем

$$\iint_D (x^2 + 2y)dxdy = \int_2^4 dx \int_0^3 (x^2 + 2y)dy = \int_2^4 dx \left[x^2 y + y^2\right]_0^3 = \int_2^4 \left(3x^2 + 9\right)dx =$$
$$= \left[x^3 + 9x\right]_2^4 = 74.$$

772. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2 + y^2 + 2)dxdy$, если область D есть прямоугольник, ограниченный прямыми $x=2,\ x=4,\ y=0,\ y=3.$

В задачах **773 – 776** вычислить двойные интегралы.

773. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 (12 - 4x - 3y)dy$. **774.** $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$.

775. $\int\limits_3^5 dx \int\limits_1^e \frac{2x-1}{y}dy$. **776.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dx$.

777. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 1,\ x = 2,\ y = \frac{1}{x},\ y = x$.

Решение. Изобразим область интегрирования D (рис. 53).

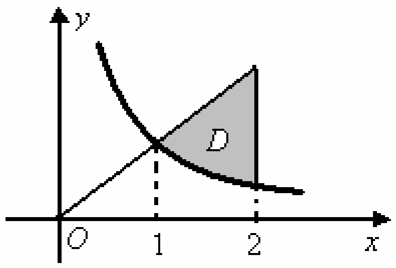


Рис. 53

Она ограничена снизу гиперболой $y = \frac{1}{x}$, сверху – прямой $y = x$, справа – прямой $x = 2$.

Для любой точки этой области $1 \le x \le 2$, а ординаты y этих точек изменяются от $y = \frac{1}{x}$ до $y = x$.

Тогда

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy = \int\limits_1^2 x^2 \left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx = -\int\limits_1^2 x^2 \left[\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx =$$

$$= -\int\limits_1^2 x^2 \left(\frac{1}{x} - x\right)dx = -\int\limits_1^2 \left(x - x^3\right)dx = -\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = -\left(2 - 4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 2\frac{1}{4}.$$

778. Вычислить двойной интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x}{y}dy$.

779. Вычислить двойной интеграл $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2-1}^{2x-1} (x+2y)dy$.

780. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xdxdy$, где область D есть треугольник с вершинами O (0; 0), A (1; 1), B (0; 1).

Решение. Для любой точки области D (рис. 54) переменная x

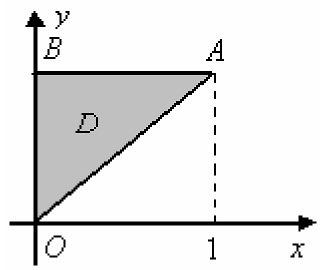


Рис. 54

изменяется от 0 до 1, а переменная y изменяется от $y = x$ до 1.

Тогда

$$\iint\limits_D xdxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 xdy = \int\limits_0^1 x[y]_x^1 dx = \int\limits_0^1 x(1-x)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

781. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y+1}^{4-y^2} f(x,y)dx.$$

Решение.

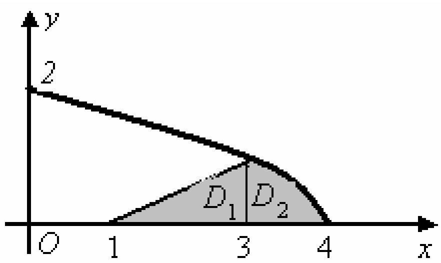


Рис. 55

Изобразим область интегрирования D данного двойного интеграла. Она ограничена снизу прямой $y=0$ (ось Оx), слева – прямой $\boldsymbol{x} = 2y+1$, справа параболой $x = 4-y^2$ (рис. 55).

Для изменения порядка интегрирования разобьем прямой $x=3$ область D на две области D_1 и D_2.

Тогда

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y+1}^{4-y^2} f(x,y)dx = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Области D_1 и D_2 определяются соответственно системами неравенств $\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le \dfrac{x-1}{2} \end{cases}$ и $\begin{cases} 3 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le \sqrt{4-x} \end{cases}$.

Имеем $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y+1}^{4-y^2} f(x,y)dx = \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{x-1}{2}} f(x,y)dy + \int\limits_3^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x}} f(x,y)dy$.

В задачах **782 – 750** изменить порядок интегрирования в следующих интегралах.

782. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy$.

783. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} dx$.

784. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2x-1}^{2x+2} dy$.

785. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} dy$.

786. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dxdy$, где область D ограничена окружностью $x^2+y^2=1$.

Решение. Запишем уравнение данной окружности в полярной системе координат. Так как $x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi$, то

$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 1,\qquad r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=1,\ r^2=1,\ r=1$.

Для данной области D угол φ меняется от 0 до 2π, а полярный радиус r изменяется от 0 до 1. Применим формулу (9. 3):

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 re^{r^2} dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(e-1)d\varphi = \frac{1}{2}(e-1)\cdot 2\pi = (e-1)\pi.$$

787. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где область D ограничена прямыми $y=x$, $y=\sqrt{3}x$ и дугой окружности $x^2+y^2=4$, лежащей в первой четверти.

788. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, где область D ограничена верхними полуокружностями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$ и осью Ox.

789. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dxdy$, где область D есть круг радиуса 1 с центром в начале координат.

9. 2. Приложения двойного интеграла

Площадь S области D вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D r d\varphi\, dr}. \tag{9. 4}$$

Объем V цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, снизу – областью D, цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей является граница области D, равен

$$\boldsymbol{V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy}. \tag{9. 5}$$

Площадь S поверхности, заданной уравнением $z = f(x,y)$, проектирующейся на плоскость xOy в область D, вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{S = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy}. \tag{9. 6}$$

Масса M материальной пластинки, имеющей поверхностную плотность $\rho = f(x,y)$, вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{M = \iint\limits_D f(x,y)dxdy}. \tag{9. 7}$$

Координаты точки $C(x_c, y_c)$, являющейся центром тяжести этой пластинки определяются по формулам:

$$\boldsymbol{x_c = \frac{\iint\limits_D f(x,y)xdxdy}{M}}, \quad \boldsymbol{y_c = \frac{\iint\limits_D f(x,y)ydxdy}{M}}. \tag{9. 8}$$

Если поверхностная плотность ρ постоянна (пластинка однородна), то из формул (9. 8) следует:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D xdxdy}{S}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D ydxdy}{S}, \qquad (9.\ 9)$$

где S – площадь области D.

790. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x - 1$ и прямой $y = x - 1$.

Решение. Вычислим площадь S данной фигуры с помощью двойного интеграла: $S = \iint\limits_D dxdy$.

Парабола и прямая пересекаются в точках $A(0, -1)$ и $B(3,2)$ (рис. 56.). Область D определятся неравенствами $0 \le x \le 3$, $x^2 - 2x - 1 \le y \le x - 1$.

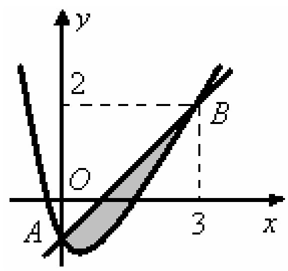


Рис. 56

Тогда

$$S = \int_0^3 dx \int_{x^2-2x-1}^{x-1} dy = \int_0^3 (x - 1 - x^2 + 2x + 1)dx =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 4{,}5.$$

В задачах **791 – 761** с помощью двойного интеграла вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями.

791. $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$.

792. $xy = 4$, $y = x$, $x = 4$.

793. $y = x^2$, $4y = x^2$, $x = \pm 2$.

794. $y = x^2$, $4y = x^2$, $y = 4$.

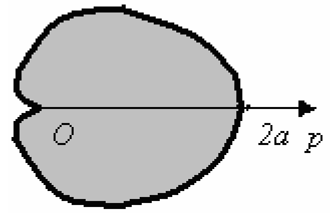
795. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$.

796. $y = x - 1$, $y = \ln x$, $y = -1$.

797. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$r = a(1 + \cos\varphi).$$

Решение.



Данная кардиоида (рис.57) симметрична относительно полярной оси Op. При изменении полярного угла от 0 до π получим половину искомой площади. Тогда площадь S рассматриваемой фигуры по формуле (9. 4) равна

Рис. 57

$$S=2\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{a(1+cos\varphi)}rdr=2\int\limits_0^{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a(1+cos\varphi)}d\varphi=a^2\int\limits_0^{\pi}(1+cos\varphi)^2d\varphi=$$

$$=a^2\int\limits_0^{\pi}(1+2cos\varphi+cos^2\varphi)d\varphi=$$

$$=a^2\int\limits_0^{\pi}\left(1+2cos\varphi+\frac{1+cos2\varphi}{2}\right)d\varphi=a^2\left[\frac{3}{2}\varphi+2sin\varphi+\frac{1}{4}sin2\varphi\right]_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

798. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой
$\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ (рис. 58).

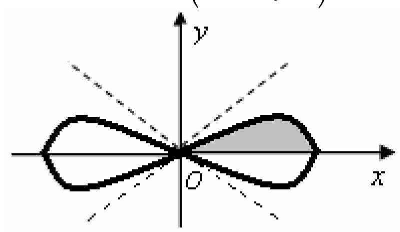


Рис. 58

Решение. Применим формулу (9. 4) и рассмотрим данную фигуру в полярной системе координат, для которой $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда уравнение лемнискаты имеет вид $r^2=a^2\left(cos^2\varphi-sin^2\varphi\right)$ или

$$r=a\sqrt{cos2\varphi}.$$

В силу симметричности данной кривой относительно координатных осей найдем площадь части фигуры, расположенной в первой четверти. Для этой части угол φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, а радиус r – от 0 до $a\sqrt{cos2\varphi}$. Имеем

$$S=4\int\limits_0^{\pi/4}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{cos2\varphi}}rdr=4\int\limits_0^{\pi/4}d\varphi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{cos2\varphi}}=$$

$$=2a^2\int\limits_0^{\pi/4}cos2\varphi\ d\varphi=a^2[sin2\varphi]_0^{\pi/4}=a^2.$$

799. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

800. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=4(1+cos\varphi)$, $r\cos\varphi=3$ (расположенную справа от прямой).

801. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2 + 1$, плоскостью $x + y - 3 = 0$ и координатными плоскостями (рис. 59).

Решение. Объем V тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, снизу – областью D, вычисляется по формуле $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

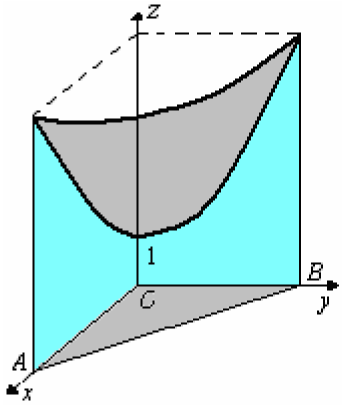


Рис. 59

В данном случае областью D является прямоугольный треугольник OAB, для которого $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3-x$. Тогда

$$V = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} \left(x^2 + y^2 + 1\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^3 dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_0^{3-x} = \int\limits_0^3 \left[x^2 (3-x) + \frac{(3-x)^3}{3} + 3 - x \right] dx =$$

$$= \int\limits_0^3 \left(6x^2 - \frac{4x^3}{3} - 10x + 12 \right) dx = \left[2x^3 - \frac{x^4}{3} - 5x^2 + 12x \right]_0^3 = 18 \text{ куб. ед.}$$

802. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z = 4 - x^2 - y^2$ и плоскостью $z = 0$.

803. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z = 4 - x^2 - y^2$ и плоскостями $x = -1, x = 1, y = -1, y = 1, z = 0$.

804. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ и цилиндром $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

805. Вычислить площадь части поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, находящейся внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ (рис. 60).

Решение. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$. Подставляя их в (9. 6), имеем $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdxy$. Областью интегрирования D является круг радиуса $r = 2$.

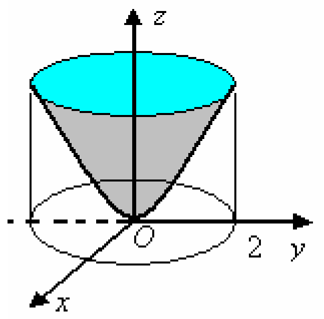


Рис. 60

Для вычисления этого двойного интеграла перейдем к полярным координатам. Область D определяется условиями : $r = 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$.

Тогда

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1+4r^2\cos^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi}\, r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1+4r^2}\, r dr =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(1+4r^2\right)^{1/2} d\left(1+4r^2\right) = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} \left[\left(1+4r^2\right)^{3/2}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{17\sqrt{17}-1}{12}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{\left(17\sqrt{17}-1\right)\pi}{6}.$$

806. Вычислить площадь поверхности, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 9$ из сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Решение. Вычислим площадь поверхности, вырезаемой цилиндром из верхней полусферы (рис. 61). Для верхней полусферы имеем

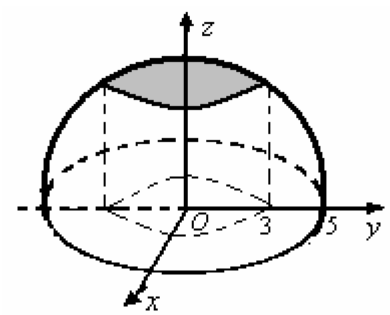


Рис. 61

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}.$$

По формуле (9. 6) получаем

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{25 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{25 - x^2 - y^2}}\, dxdy = \iint_D \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

Здесь область D есть круг радиуса $r = 3$ с центром в начале координат. Для вычисления этого интеграла перейдем к полярным координатам.

$$S=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\frac{5}{\sqrt{25-r^2cos^2\varphi-r^2sin^2\varphi}}rdr=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\frac{5rdr}{\sqrt{25-r^2}}=$$

$$=-5\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\sqrt{25-r^2}\right]_0^3=-5\int_0^{2\pi}d\varphi\,(4-5)=5[\varphi]_0^{2\pi}=10\pi.$$

Следовательно, искомая площадь равна 20π.

807. Вычислить площадь части поверхности конуса $x^2+y^2-z^2=0$, находящейся внутри цилиндра $(x-1)^2+y^2=1$.

808. Найти массу круглой пластинки радиуса *R*, если поверхностная плотность в каждой ее точке пропорциональна расстоянию точки до центра круга.

Решение. Пусть $P(x,y)$ – произвольная точка пластинки. По условию задачи плотность $\rho=f(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$, где κ – коэффициент пропорциональности. По формуле (9. 7) имеем: масса пластинки $M=\iint\limits_D k\sqrt{x^2+y^2}dxdy$. Для вычисления этого интеграла перейдем к полярным координатам.

Тогда

$$M=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R krrdr=k\int_0^{2\pi}d\varphi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R=\frac{kR^3}{3}[\varphi]_0^{2\pi}=\frac{2kR^3\pi}{3}.$$

809. Найти массу квадратной пластинки со стороной *a*, в каждой точке которой поверхностная плотность пропорциональна сумме ее расстояний до диагоналей квадрата.

810. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-2x-1$ и прямой $y=x-1$ (рис. 62).

Решение.

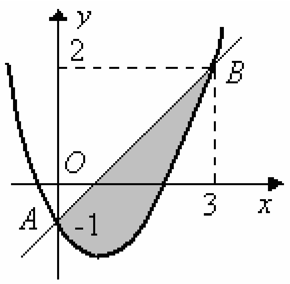


Рис. 62

Вычислим площадь *S* данной фигуры с помощью двойного интеграла: $S=\iint\limits_D dxdy$.

Парабола и прямая пересекаются в точках $A(0,-1)$ и $B(3,2)$.Область *D* определятся неравенствами $0\le x\le 3$, $x^2-2x-1\le y\le x-1$.

Тогда

$$S=\int_0^3 dx\int_{x^2-2x-1}^{x-1}dy=\int_0^3(x-1-x^2+2x+1)dx=$$

$$=\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=4{,}5.$$

Вычислим статические моменты M_x и M_y пластинки относительно осей Ox и Oy:

$$M_x=\iint_D ydxdy=\int_0^3 dx\int_{x^2-2x-1}^{x-1}ydy=\int_0^3 dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2-2x-1}^{x-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3\left(4x^3-x^4-x^2-6x-2\right)dx=\frac{1}{2}\left[x^4-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-3x^2-2x\right]_0^3=-4\frac{13}{15}.$$

$$M_y=\iint_D xdxdy=\int_0^3 xdx\int_{x^2-2x-1}^{x-1}dy=\int_0^3 xdx[y]_{x^2-2x-1}^{x-1}=\int_0^3\left(3x^2-x^3\right)dx=6{,}75.$$

Следовательно, $x_C=\dfrac{6{,}75}{4{,}5}=1{,}5$, $y_C=-\dfrac{4\frac{13}{15}}{4{,}5}=-1\dfrac{11}{135}$ и

точка $C\left(1\dfrac{1}{2};-1\dfrac{11}{135}\right)$ – центр тяжести данной фигуры.

811. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной окружностями $r=2a\cos\varphi$ и $r=4a\cos\varphi$ (рис. 63).

Решение. Так как данная фигура симметрична относительно оси Ox,

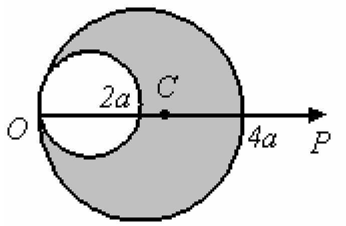


Рис. 63

то центр тяжести находится на этой оси, то есть $y_C=0$. Применим формулу (9. 9). Вычислим статический момент $M_y=\iint\limits_D xdxdy$

Здесь область D в полярной системе координат определяется неравенствами $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, $2a\cos\varphi\le r\le 4a\cos\varphi$. Имеем

$$M_y = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2a\cos\varphi}^{4a\cos\varphi} r\cos\varphi\, rdr = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_{2a\cos\varphi}^{4a\cos\varphi} r^2 dr =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \left[\frac{r^3}{3}\right]_{2a\cos\varphi}^{4a\cos\varphi} = \frac{2}{3}a^3 \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(64\cos^3\varphi - 8\cos^3\varphi\right)\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{112}{3}a^3 \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{28}{3}a^3 \int\limits_{0}^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{28}{3}a^3 \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{28}{3}a^3 \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{28}{3}a^3 \left[\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right]_0^{\pi/2} = 7\pi a^3 .$$

Площадь S фигуры равна разности площадей двух кругов: $S = 4\pi a^2 - \pi a^2 = 3\pi a^2$.

Следовательно, $x_c = \dfrac{7\pi a^3}{3\pi a^2} = \dfrac{7}{3}a$ и $C\left(\dfrac{7}{3}a, 0\right)$ - искомый центр тяжести.

812. Пластинка задана ограничивающими ее линиями $x = 0{,}5$, $y = 0$, $y^2 = 8x$ $(y \geq 0)$; $\rho(x, y) = 7x + 3y^2$ - поверхностная плотность. Найти координаты центра тяжести этой пластинки.

813. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - 3x^2$ и осью Ox.

814. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$.

9. 3. Тройной интеграл

Тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области V называется предел при $max\,d_i \to 0$ интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$ и обозначается символом $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$, то есть

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \lim_{max\,d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i . \qquad (9.\ 10)$$

Если область интегрирования V ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x,y)$, сверху поверхностью $z = z_2(x,y)$ и проектируется на плоскость xOy в область, определяемую неравенствами $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz . \qquad (9.\ 11)$$

При переходе от декартовых прямоугольных координат x, y, z к *цилиндрическим координатам* $\rho,\ \varphi,\ z$ (рис. 64), связанных соотношениями $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, где
$0 \le \rho \le \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\infty < z < \infty$, тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho\, d\rho \int_{z_1}^{z_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz . \qquad (9.\ 12)$$

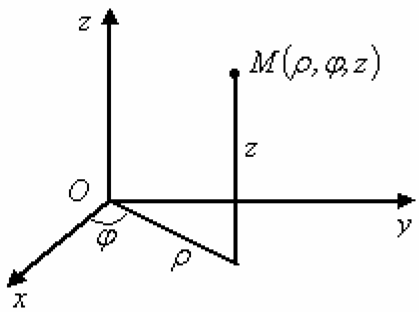


Рис. 64

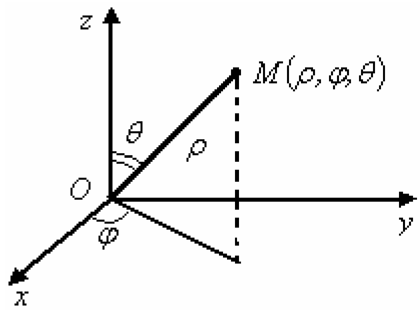


Рис. 65

При переходе от декартовых прямоугольных координат x, y, z к *сферическим координатам* $\rho,\ \varphi,\ \theta$ (рис. 65), связанных соотношениями

$x = \rho sin\theta cos\varphi$, $y = \rho sin\theta sin\varphi$, $z = \rho cos\theta$, где $0 \le \rho \le \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} sin\theta\, d\theta \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 f(\rho\, sin\theta\, cos\varphi, \rho\, sin\theta\, sin\varphi, \rho\, cos\theta) d\rho . \qquad (9.\ 13)$$

815. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \left(x^3y^2 - 3z^2\right)dxdydz$, если область V ограничена плоскостями $x = 2$, $x = 4$, $y = -3$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 1$.

Решение. По формуле (9. 11) имеем:

$$\iiint\limits_V \left(x^3y^2 - 3z^2\right)dxdydz = \int\limits_2^4 dx \int\limits_{-3}^2 dy \int\limits_0^1 \left(x^3y^2 - 3z^2\right)dz =$$

$$= \int\limits_2^4 dx \int\limits_{-3}^2 dy \left[x^3y^2z - z^3\right]_0^1 = \int\limits_2^4 dx \int\limits_{-3}^2 \left(x^3y^2 - 1\right) dy = \int\limits_2^4 dx \left[\frac{1}{3}x^3y^3 - y\right]_{-3}^2 =$$

$$= \int\limits_2^4 \left(\frac{35}{3}x^3 - 5\right) dx = \left[\frac{35}{12}x^4 - 5x\right]_2^4 = 690.$$

816. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, если область V ограничена плоскостью $x + y + z = 1$ и координатными плоскостями.

Решение. Область V (рис.66) есть треугольная пирамида, ограниченная сверху плоскостью $x + y + x = 1$, снизу – плоскостью $z = 0$. Ее проекцией на плоскость xOy является прямоугольный треугольник AOB, определяемый неравенствами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$.

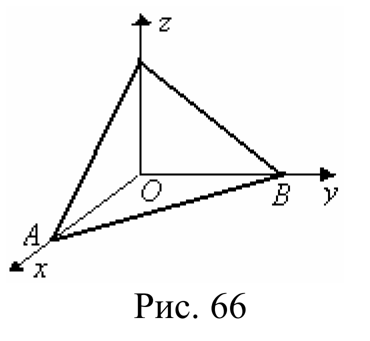


Рис. 66

Имеем

$$I=\iiint\limits_V xyzdxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}xyzdz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}xy\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}y(1-x-y)^2dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}\left[y(1-x)^2-2(1-x)y^2+y^3\right]dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx\left[\frac{y^2}{2}(1-x)^2-\frac{2}{3}(1-x)y^3+\frac{y^4}{4}\right]_0^{1-x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left[\frac{(1-x)^4}{2}-\frac{2}{3}\left(1-x^4\right)+\frac{(1-x)^4}{4}\right]dx=\frac{1}{24}\int\limits_0^1 x(1-x)^4dx.$$

Для вычисления последнего интеграла положим $1-x=t$, тогда $dx=-dt$.

Имеем

$$I=\frac{1}{24}\int\limits_0^1(1-t)t^4dt=\frac{1}{24}\int\limits_0^1(t^4-t^5)dt=\frac{1}{24}\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{720}.$$

817. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V xydxdydz$, если область V ограничена цилиндром $x^2+y^2=1$, плоскостью $z=1$ и координатными плоскостями.

818. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V(3x+4y)dxdydz$, если область V ограничена параболоидом $z=x^2+y^2$, параболическим цилиндром $y=x^2$, плоскостями $y=1$, $z=0$.

819. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, если область V ограничена цилиндром $x^2+y^2=2x$ и плоскостями $y=0$, $z=0$, $z=a$.

Решение. Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение данного цилиндра в этих координатах имеет вид:

$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\cos\varphi$, $\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=2\rho\cos\varphi$, $\rho=2\cos\varphi$.

Для любой точки области V координаты ρ, φ, z изменяются в следующих пределах: $0 \le \rho \le 2\cos\varphi,\quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le z \le a$.

По формуле (9. 12) имеем:

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_V z\rho \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho \int\limits_0^{a} z\, dz =$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2\varphi\right) d\left(\sin\varphi\right) =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \left[\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{8}{9}a^2 .$$

820. Вычислить $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy\,dz$, если область V есть верхняя половина шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

Решение. Перейдем к сферическим координатам. Переменные ρ, φ, θ для данной области изменяются в следующих пределах:

$0 \le \rho \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

По формуле (9. 13) имеем:

$$\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V \rho^4 \sin^3\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int\limits_0^{R} \rho^4 d\rho \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{R} \rho^4 d\rho \int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos^2\theta - 1\right) d\left(\cos\theta\right) = 2\pi \int\limits_0^{R} \rho^4 d\rho \left[\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{4}{15}\pi R^5 .$$

821. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x + y + z)dxdydz$, если область V ограничена плоскостью $x + y + z = 1$ и координатными плоскостями.

822. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, если область V ограничена плоскостями $x=0,\ x=1,\ y=-1,\ y=3,\ z=0,\ z=2.$

9. 4. Приложения тройного интеграла

Объем V тела равен

$$\boldsymbol{V = \iiint\limits_V dxdydz}. \qquad (9.\ 14)$$

Масса M тела, ограниченного областью V, если плотность в каждой его точке равна $\rho = f(x,y,z)$, вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{M = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz}. \qquad (9.\ 15)$$

Если плотность ρ каждой точки тела объема V есть функция координат этой точки, то есть $\rho = f(x,y,z)$, то координаты центра тяжести этого тела вычисляются по формулам

$$\boldsymbol{x_c = \frac{\iiint\limits_V \rho\, xdxdydz}{M}},\quad \boldsymbol{y_c = \frac{\iiint\limits_D \rho\, ydxdydz}{M}},\quad \boldsymbol{z_c = \frac{\iiint\limits_V \rho\, zdxdydz}{M}}. \qquad (9.\ 16)$$

где M – масса тела.

Если тело однородно (ρ - постоянная), то

$$\boldsymbol{x_c = \frac{\iiint\limits_V xdxdydz}{V}},\quad \boldsymbol{y_c = \frac{\iiint\limits_V ydxdydz}{V}},\quad \boldsymbol{z_c = \frac{\iiint\limits_V zdxdydz}{V}}. \qquad (9.\ 17)$$

823. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$, плоскостью $x + y - 3 = 0$ и координатными плоскостями.

Решение. Область V (рис. 67) определяется неравенствами $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3-x,\ 0 \le z \le x^2 + y^2 + 1.$

По формуле (9. 14) имеем:

$$V = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} dy \int\limits_0^{x^2+y^2+1} dz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} dy [z]_0^{x^2+y^2+1} =$$

$$= \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} (x^2 + y^2 + 1)dy = \int\limits_0^3 dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_0^{3-x} =$$

$$=\int_0^3 dx\int_0^{3-x}(x^2+y^2+1)dy=\int_0^3 dx\left[x^2y+\frac{y^3}{3}+y\right]_0^{3-x}=$$

$$=\int_0^3\left[x^2(3-x)+\frac{(3-x)^3}{3}+3-x\right]dx=$$

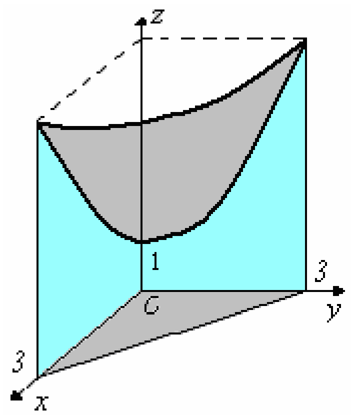


Рис. 67

$$=\int_0^3\left(6x^2-\frac{4x^3}{3}-10x+12\right)dx=\left[2x^3-\frac{x^4}{3}-5x^2+12x\right]_0^3=18.$$

824. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=3x^2+3y^2$, $x+y-2=0$, $x=0, y=0, z=0$.

825. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2=2$.

826. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z=4-\dfrac{x^2+y^2}{2}$ и конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 68).

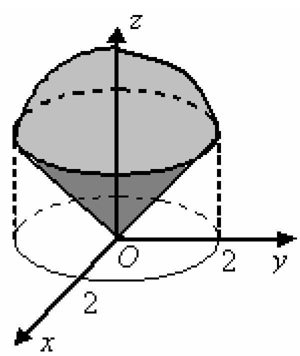


Рис. 68

Решение. Найдем проекцию данного тела на плоскость xOy. Исключая z из данных уравнений, получаем $4-\dfrac{x^2+y^2}{2}=\sqrt{x^2+y^2}$.

Отсюда $x^2+y^2=4$. Это уравнение окружности с центром в начале координат радиуса 2.

Для вычисления искомого объема перейдем к цилиндрическим координатам:
уравнение конуса в этих координатах имеет вид $z=\rho$, а цилиндра – $z=4-\dfrac{\rho^2}{2}$. Для любой точки области V координаты ρ,φ,z изменяются в следующих пределах: $0\le\rho\le 2,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad \rho\le z\le 4-\dfrac{\rho^2}{2}$.

Тогда

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\,d\rho\int\limits_\rho^{4-\frac{\rho^2}{2}}dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(4-\frac{\rho^2}{2}-\rho\right)\rho\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(4\rho-\frac{\rho^3}{2}-\rho^2\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left[2\rho^2-\frac{\rho^4}{8}-\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2=\frac{10}{3}[\varphi]_0^{2\pi}=\frac{20}{3}\pi.$$

827. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями
$z=6-x^2-y^2,\quad z=\dfrac{1}{4}y,\ x=0,\ x=1,\ y=2.$

828. Вычислить массу полушара $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $z=0$, если плотность в каждой его точке равна аппликате этой точки.

Решение. По формуле (9. 15) имеем:

$$M=\iiint\limits_V zdxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^R zdz=\frac{R^2}{2}\iint\limits_D dxdy.$$

Здесь областью D является круг $x^2+y^2=R^2$.

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам, где $0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le r\le R$. Тогда

$$M=\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R rdr=\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}d\varphi=\frac{R^4}{4}[\varphi]_0^{2\pi}=\frac{\pi R^4}{4}.$$

829. Найти массу тела, ограниченного плоскостью $x + y + z = 1$ и координатными плоскостями, если плотность в каждой его точке равна произведению координат этой точки.

Решение. Искомая масса M равна $\iiint\limits_V x\,y\,z\,dxdydz$.

По условию задачи область V совпадает с той областью, которая рассмотрена в задаче **816**. Тогда

$$M = \iiint\limits_V xyzdxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyzdz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} xy\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} y(1-x-y)^2 dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x}\left[y(1-x)^2 - 2(1-x)y^2 + y^3\right]dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx\left[\frac{y^2}{2}(1-x)^2 - \frac{2}{3}(1-x)y^3 + \frac{y^4}{4}\right]_0^{1-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left[\frac{(1-x)^4}{2} - \frac{2}{3}\left(1-x^4\right) + \frac{(1-x)^4}{4}\right]dx = \frac{1}{24}\int\limits_0^1 x(1-x)^4 dx.$$

Для вычисления последнего интеграла положим $1 - x = t$, тогда $dx = -\,dt$.

Имеем

$$I = \frac{1}{24}\int\limits_0^1 (1-t)t^4 dt = \frac{1}{24}\int\limits_0^1 (t^4 - t^5)dt = \frac{1}{24}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{720}.$$

830. Вычислить массу пирамиды, ограниченной плоскостью $3x + 2y + 3z - 6 = 0$ и координатными плоскостями, если плотность в каждой ее точке равна абсциссе этой точки.

831. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $x = 0, x = 1$, $y = -1, y = 3, z = 0, z = 2$, если плотность в каждой его точке равна сумме координат этой точки.

832. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного верхней полусферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и плоскостью xOy.

Решение. Для нахождения координат центра тяжести однородного тела применим формулы (9. 17).

В силу симметрии данного тела его центр тяжести находится на оси Oz, поэтому $x_C = y_C = 0$.

Вычислим тройной интеграл

$$\iiint\limits_V zdxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\iint\limits_D \left(R^2 - x^2 - y^2\right)dxdy .$$

Здесь областью D является проекция данного тела на плоскость xOy –круг с центром в начале координат радиуса R. Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам, в которых область D определяется неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le R$.

Тогда

$$\frac{1}{2}\iint\limits_D \left(R^2 - x^2 - y^2\right)dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \left(R^2 - r^2\right)rdr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{1}{2}R^2 r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^R =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4}R^4 d\varphi = \frac{1}{8}R^4 [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{1}{4}\pi R^4 .$$

Объем V данного тела как полушара равен $\frac{2}{3}\pi R^3$.

По формуле (9. 17) находим

$$z_C = \frac{\frac{1}{4}\pi R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8}R .$$

Следовательно, точка $C\left(0,0,\frac{3}{8}R\right)$ - искомый центр тяжести.

833. Вычислить координаты центра тяжести куба $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, если плотность в каждой его точке равна произведению координат этой точки.

Решение. По условию задачи плотность $\rho = x\,y\,z$. Найдем массу M куба:

$$M = \iiint\limits_V x\,y\,z\,dxdydz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^1 ydy \int\limits_0^1 zdz = \frac{1}{8}.$$

В силу симметрии куба $x_C = y_C = z_C$. Вычислим числитель для x_C

формулы (9. 17).

$$\iiint\limits_V x\,y\,z\,x\,dxdydz = \int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^1 ydy\int\limits_0^1 zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^1 ydy = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x^2dx = \frac{1}{12}.$$

Тогда $x_c = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8}} = \dfrac{2}{3}$ и точка $C\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ - центр тяжести куба.

834. Вычислить координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 1$.

835. Вычислить координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного плоскостью $x + y + z - a = 0$ координатными плоскостями.

9. 5. Криволинейный интеграл

Пусть на плоскости xOy задана область D, в которой непрерывны функции $z = P(x,y)$ и $z = Q(x,y)$ и кривая AB, определяемая уравнением $y = f(x)$. Точками $M_1, M_2,\ldots,M_i,\ldots,M_{n-1}$ разобьем дугу AB произвольным образом на n частей (рис. 69).

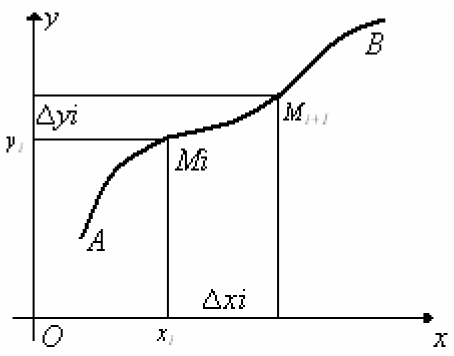


Рис. 69

Обозначим через $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, где $i = 0,1,\ldots,n-1$. Произвольно выберем точки $N_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$, принадлежащие i-й части дуги AB. Составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} P(\hat{x}_i,\hat{y}_i)\Delta x_i + Q(\hat{x}_i,\hat{y}_i)\Delta y_i\,, \tag{9. 18}$$

которую назовем n – й интегральной суммой.

Криволинейным интегралом по дуге AB называется предел при $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_i \to 0$ интегральной суммы (9. 18) и обозначается

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

то есть

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(\hat{x}_i, \hat{y}_i)\Delta x_i + Q(\hat{x}_i, \hat{y}_i)\Delta y_i .$$

Подобным образом определяется понятие криволинейного интеграла от функции трех и большего числа переменных.

Пусть контур интегрирования – дуга *AB* задана уравнением $y = f(x)$, где $a \le x \le b$.

Тогда

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P[x, f(x)]dx + Q[x, f(x)]f'(x)dx = \int_a^b \Phi(x)dx,$$

где $\Phi(x) = P[x, f(x)] + Q[x, f(x)]f'(x)$. (9. 19)

Если контур интегрирования задан параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$, то формула (9. 19) принимает вид

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)dt + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)dt .$$

Если L – замкнутый контур, ограничивающий на плоскости xOy область *D*, то криволинейный интеграл по замкнутому контуру вычисляется по формуле **Грина**

$$\boldsymbol{\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy} . \quad (9.\ 20)$$

Здесь контур L обходится против часовой стрелки.

Интеграл $\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

Функция $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ определяется по формуле

$$\boldsymbol{U(x,y)=\int_{x_o}^{x} P(x,y_o)dx+\int_{y_o}^{y} Q(x,y)dy+C}, \qquad (9.\ 21)$$

где начальная точка $A(x_o,y_o)$ принадлежит области определения функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

Работа A, выполненная силой $\boldsymbol{F} = P(x, y)\,\boldsymbol{i} + Q(x, y)\,\boldsymbol{j}$ по перемещению точки M по дуге L кривой $y=f(x)$ от точки $M_1(x_1,y_1)$ до точки $M_2(x_2,y_2)$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{A=\int_{L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy}. \qquad (9.\ 22)$$

836. Вычислить $\int_L 4xdx+2ydy$, где L – дуга параболы $y=x^3$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2,8)$.

Решение. По формуле (9. 19) имеем:

$$\int_L 4xdx+2ydy=\int_1^2 4xdx+2x^3 3x^2dx=\int_1^2\left(4x+6x^5\right)dx=\left[2x^2+x^6\right]_1^2=69.$$

837. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L y^2dx+xydy$, где L – дуга эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, расположенная в первой четверти.

Решение. Контур интегрирования задан параметрическими уравнениями. Применяем формулу

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)dt+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)dt.$$

Имеем

$$\int_L y^2dx+xydy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b^2\sin^2 t(-a\sin t)dt+ab\cos t\sin t b\cos t dt=$$

$$=ab^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin t\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)dt=$$

$$= ab^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t \cos 2t dt = \frac{1}{2} ab^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} [\ \sin(-t) + \sin 3t\ ] dt = \frac{1}{2} ab^2 \left[\cos t - \frac{1}{3} \cos 3t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= \frac{1}{3} ab^2\ .$$

838. Вычислить интеграл $\int\limits_{OAB} (x+y)dx - xdy$ по ломаной OAB, если $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(4, 2)$ (рис. 70).

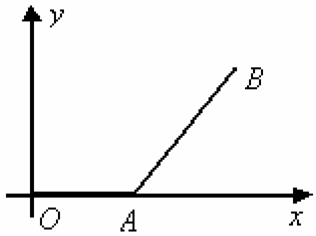


Рис. 70

Решение. Применим следующее свойство криволинейного интеграла: если в криволинейном интеграле контур интегрирования разбить на части, то интеграл по всему контуру равен сумме интегралов, взятых по каждой части.

Рассмотрим контур интегрирования OAB как сумму $OA + OB$.

Тогда

$$\int\limits_{OAB} (x+y)dx - xdy = \int\limits_{OA} (x+y)dx - xdy + \int\limits_{AB} (x+y)dx - xdy .$$

Так как на отрезке OA переменная x изменяется от 0 до 2, а $y = 0$, то $\int\limits_{OA} (x+y)dx - xdy = \int\limits_{0}^{2} xdx = 2.$

Составим уравнение прямой AB:

$$\frac{y-0}{2-0} = \frac{x-2}{4-2};\quad y = x - 2\ ;\quad dy = dx\ .$$

Тогда

$$\int\limits_{AB} (x+y)dx - xdy = \int\limits_{2}^{4} (x + x - 2)dx - x\,dx = \int\limits_{2}^{4} (x-2)dx = 2.$$

Следовательно, $\int\limits_{OAB}(x+y)dx - xdy = 2+2=4.$

839. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L}\frac{ydx+4xdy}{x^2+y^2}$, где L - отрезок прямой от точки $A(1, 2)$ до точки $B(3, 6)$.

840. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L} ydx - xdy$, где L – дуга астроиды $x = a\,cos^3 t$, $y = a\,sin^3 t$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

841. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L}\left(xy - y^2\right)dx + xdy$, где L- ломаная OAB: $O(0, 0)$, $A\left(\frac{1}{2},3\right)$, $B(1, 2)$.

842. Вычислить интеграл $\int\limits_{L}\left(x^2+y+z\right)dx + z^2dy + \left(x+y^2\right)dz$, где L- отрезок прямой от точки $A(2, 1, 0)$ до точки $B(4, 3, 1)$.

Решение. Составим уравнение прямой AB:

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-0}{1-0}\ ;\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1} \ \text{ или } \ \begin{cases} x = 2z+2 \\ y = 2z+1 \end{cases}.$$

Тогда

$$\int\limits_{L}\left(x^2+y+z\right)dx + z^2dy + \left(x+y^2\right)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[(2z+2)^2 + 2z+1+z\right]2\,dz + z^2\,2\,dz + \left[2z+2+(2z+1)^2\right]dz =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(14z^2+28z+13\right)dz = \left[\frac{14z^3}{3}+14z^2+13z\right]_0^1 = \frac{95}{3}.$$

843. Вычислить интеграл $\int\limits_{L} x^2dx + (x+z)\,dy + xy\,dz$, где L – дуга кривой $x = sin\,t$, $y = sin^2 t$, $z = sin^3 t$ и $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

844. Вычислить интеграл $\int\limits_L (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$, где L – дуга кривой $x = t^2$, $y = t^4$, $z = t^6$ и $0 \le t \le 1$.

845. Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_L -x^2 y dx + xy^2 dy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. По условию задачи $P(x,y) = -x^2 y$, $Q(x,y) = x y^2$.

Тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = y^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -x^2$. По формуле Грина имеем

$$I = \oint\limits_L -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint\limits_D \left(y^2 + x^2\right) dxdy .$$

Для вычисления полученного интеграла перейдем к полярным координатам. Область D определяется неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le R$.

Тогда

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \left(r^2 \sin^2\varphi + r^2 \cos^2\varphi\right) r dr = \int\limits_0^{2\pi} \partial\varphi \int\limits_0^R r^3 dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^4}{4}[\varphi]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\pi R^4.$$

846. Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_L 6x^2 y^2 dx + 4x^3 y\, dy$, где L – эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Применим формулу Грина:

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Здесь $P(x,y) = 6x^2 y^2$, $Q(x,y) = 4x^3 y$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12x^2 y$. Следовательно, подынтегральное выражение есть полный дифференциал и данный интеграл равен 0.

847. Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_L x\left(y^2 - x\right) dx + x^2 y\, dy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

848. Вычислить работу, выполненную силой

$\boldsymbol{F} = \left(x^2 + y\right)\boldsymbol{i} + \left(x + y^2\right)\boldsymbol{j}$ при перемещении материальной точки от точки $B\,(-1,\,1)$ до точки $C\,(0,\,2)$ по прямой BC.

Решение. Составим уравнение прямой BC:

$$\frac{x+1}{0+1} = \frac{y-1}{2-1}\ ; \quad y = x + 2\,.$$

По формуле (9. 22) имеем:

$$A = \int\limits_{L} \left(x^2 + y\right)dx + \left(x + y^2\right)dy = \int\limits_{-1}^{0} \left(x^2 + x + 2\right)dx + \left[x + (x+2)^2\right]dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \left(2x^2 + 6x + 6\right)dx = \left[\frac{2x^3}{3} + 3x^2 + 6x\right]_{-1}^{0} = \frac{11}{3}\,.$$

849. Вычислить работу, выполненную силой $\boldsymbol{F} = 4x^3y\,\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j}$ при перемещении материальной точки от точки $(0,\,0)$ до точки $C\,(2,\,8)$ вдоль дуги кривой $y = x^3$.

850. Найти функцию $U(x,y)$, если ее дифференциал

$$dU = \left(3x^2 + e^{2y}\right)dx + \left(\sin y + 2xe^{2y}\right)dy\,.$$

Решение. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int\limits_{L} \left(3x^2 + e^{2y}\right)dx + \left(\sin y + 2xe^{2y}\right)dy\,.$$

Под знаком интеграла стоит полный дифференциал, поэтому этот интеграл не зависит от контура интегрирования. Выберем на плоскости xOy три точки: $O(0,\,0)$, $A(x,\,0)$, $M(x,\,y)$ и за контур интегрирования L примем ломаную OAM. На отрезке OA $y = 0$ и, следовательно, $dy = 0$; на отрезке AM $x = const$ и, следовательно, $dx = 0$.

Имеем

$$U(x,y) = \int\limits_{L} = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AM} = \int\limits_{0}^{x} \left(3x^2 + 1\right)dx + \int\limits_{0}^{y} \left(\sin y + 2xe^{2y}\right)dy =$$

$$= \left[x^3 + x\right]_0^x + \left[-\cos y + xe^{2y}\right]_0^y = x^3 + x - \cos y + xe^{2y} + 1 - x =$$

$$= x^3 - \cos y + xe^{2y} + C\,.$$

851. Найти функцию $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу

$$dU=\left[\frac{-y^2}{(x-1)^2}-\frac{3}{sin^2 3x}\right]dx+\left(3y^2+\frac{2y}{x-1}\right)dy.$$

Решение. Выберем за начальную точку $A(2,\ 0)$ (поскольку подынтегральная функция не определена при $x = 0$ и $x = 1$). Подставив в формулу (9. 21) $x_o = 2$ и $y_o = 0$, получаем

$$U(x,y)=\int_2^x\left(-\frac{3}{sin^2 3x}\right)dx+\int_0^y\left(3y^2+\frac{2y}{x-1}\right)dy=$$

$$=\left[ctg3x\right]_2^x+\left[y^3+\frac{y^2}{x-1}\right]_0^y = ctg3x-ctg6+y^3+\frac{y^2}{x-1}+C=$$

$$=ctg3x+y^3+\frac{y^2}{x-1}+C.$$

852. Найти функцию $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу

$$dU=\left(4x^3y^3+2e^{2x}\right)dx+\left(3x^4y^2-2cos\,2y\right)dy.$$

853. Найти функцию $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу

$$du=\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+ln\,y\right)dx+\frac{x}{y}dy.$$

ГЛАВА 10. РЯДЫ

10. 1. Числовые ряды

Числовым рядом называется выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n , \qquad (10.\ 1)$$

где числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, называемые *членами ряда*, образуют известную числовую последовательность.

Число u_n называется *общим членом* ряда. Общий член ряда является функцией от *n*. Если известно аналитическое выражение этой функции, то придавая n последовательно значения 1, 2, 3,…, можно найти сколько угодно членов ряда.

Числовой ряд (10. 1) называется *сходящимся*, если сумма первых n его членов $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ при $n \to \infty$ имеет конечный предел A. Этот предел называется *суммой* сходящегося ряда.

Если же S_n не имеет предела, то ряд называется *расходящимся.*

Если ряд (10. 1) сходится и его сумма равна *A*, то разность $A - S_n = R_n$ называется *n*-м *остатком* ряда, то есть $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$

Для установления сходимости или расходимости ряда используют *признаки сходимости.*

Необходимый признак сходимости. *Если числовой ряд* (10. 1) *сходится, то его общий член* u_n *стремится к нулю при* $n \to \infty$, *то есть* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. *Если же* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, *то ряд расходится.*

Достаточные признаки сходимости рядов

Признаки сравнения рядов

1. *Если каждый член ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (10. 1) *с положительными членами, начиная с некоторого номера, не превосходит соответствующих членов сходящегося ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ (10. 2), *то ряд* (10. 1) *сходится. Если же каждый член ряда* (10. 1), *начиная с некоторого номера, не меньше соответствующего члена расходящегося ряда* (10. 2), *то ряд* (10. 1) *расходится.*

2. *Если существует отличный от нуля предел при* $n \to \infty$ *отношения общих членов рядов (*10. 1) *и* (10. 2)*, то есть*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = a \neq 0,$$

то оба ряда либо сходятся, либо расходятся.

Признак Даламбера.

Если в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *с положительными членами существует предел при* $n \to \infty$ *отношения последующего члена ряда к предыдущему, то есть* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$*, то при* $q < 1$ *ряд сходится, при* $q > 1$ *- расходится. При* $q = 1$ *требуется дополнительное исследование (применение других признаков сходимости).*

Признак Коши.

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *существует* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = A$ *, то при* $A<1$ *ряд сходится, при* $A>1$ *расходится.*

Интегральный признак.

Если функция $f(x)$ *непрерывна, положительна и монотонно убывает на интервале* $[a;b]$*, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$*, где* $u_n = f(n)$ *сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом* $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Ряд
$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \qquad (10.\ 3)$$

где $u_n > 0$, называется *знакочередующимся.*

Сходимость знакочередующегося ряда устанавливается признаком Лейбница*: если члены знакочередующегося ряда* (10. 3) *монотонно убывают по абсолютной величине и* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$*, то ряд сходится.*

Знакочередующийся ряд (10. 3) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (10. 4), составленный из абсолютных величин его членов. Знакочередующийся сходящийся ряд (10. 3) называется *условно сходящимся,* если ряд (10. 4) расходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – (10. 5), где a_n и b_n – действительные числа, i – мнимая единица $\left(i^2 = -1\right)$ называется числовым рядом с комплексными членами.

Ряд (10. 5) называется *сходящимся*, если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (10.6) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (10. 7).

Если суммы рядов (10. 6) и (10. 7) равны соответственно числам A и B, то комплексное число $A + Bi$ называется суммой ряда (10. 5).

Ряд (10. 5) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей его членов, то есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}}\ .$$

854. Написать пять первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)}$.

Решение. Подставляя в формулу общего члена $u_n = \frac{2n+3}{n(n+1)}$ последовательно $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$, получим

$$u_1 = \frac{5}{2}\ ;\quad u_2 = \frac{7}{6}\ ;\quad u_3 = \frac{4}{4}\ ;\quad u_4 = \frac{11}{20}\ ;\quad u_5 = \frac{13}{30}.$$

855. Написать пять первых членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^2+1}$.

856. Написать формулу общего члена ряда $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots$

Решение. Числители членов данного ряда есть нечетные числа вида $2n-1$, а знаменатели – степени 2^n. Поэтому, общий член $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

В задачах **857 – 860** написать формулу общего члена каждого ряда.

857. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots$.

858. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\ldots$.

859. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\frac{8}{9}\ldots$.

860. $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\ldots$.

861. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n+1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}=1$, не выполняется необходимый признак сходимости, поэтому данный ряд расходится.

862. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n(n+1)}$.

Решение. Выполняется, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 0.$$

В задачах **863 – 866** проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости рядов.

863. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3n-1}$.

864. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$.

865. $\sum_{n=1}^{\infty} sin\frac{1}{n}$.

866. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$.

867. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$.

Решение. Запишем общий член ряда в следующем виде:

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Тогда

$u_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)$; $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$; $u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$; $u_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)$ и т. д.

Составим n – ную частичную сумму ряда:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Вычисляем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, данный ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

868. Исследовать сходимость ряда $1+q+q^2+q^3+...+q^n+...$.

Решение. Ряд является геометрической прогрессией, знаменатель которой равен q.

При $|q|<1$ имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q}$.

Следовательно, в этом случае данный ряд сходится.

Если $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ и ряд расходится.

При $q=1$ ряд $1 + 1 + 1 + \ldots +$ расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости.

При $q=-1$ знакочередующийся ряд $1 - 1 + 1 - \ldots +$ расходится, так как не выполняется признак Лейбница.

869. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}$.

Решение. Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, являющимся суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой $q=\frac{1}{2}$. Этот ряд сходится к числу 2.

Каждый член $u_n = \frac{1}{(n+1)2^n}$ данного ряда, начиная со второго, меньше соответствующего члена $v_n = \frac{1}{2^n}$ сходящегося ряда, следовательно, по признаку 1 сравнения рядов данный ряд сходится.

870. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Сравним данный ряд с расходящимся *гармоническим* рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (его расходимость будет показана ниже).

Так как $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ для $n = 2, 3, 4, \ldots$, то из сравнения с гармоническим рядом следует расходимость данного ряда.

871. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(n+1)}{n}$.

Решение. Каждый член $u_n = \frac{ln(n+1)}{n}$ данного ряда, начиная со второго, больше соответствующего члена $v_n = \frac{1}{n}$ расходящегося гармонического ряда, следовательно, по признаку 1 сравнения рядов данный ряд расходится.

872. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Решение. Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{n^2}{2^n} \; ; \; u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}};$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n (n+1)^2}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Так $q = \frac{1}{2} < 1$, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

873. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$.

Решение. Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{n!}{3^n} \; ; \; u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}};$$

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(n+1)!}{3^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=\infty.$$

По признаку Даламбера данный ряд расходится.

874. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$.

Решение. Применим признак Даламбера:

$$u_n=\frac{3^n}{2^n(2n+1)}\ ;\ u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(2n+3)};$$

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}2^n(2n+1)}{3^n2^{n+1}(2n+3)}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{3}{2}>1.$$

Так, $q=\frac{3}{2}>1$, по признаку Даламбера данный ряд расходится.

В задачах **875 – 882** исследовать сходимость данных рядов, пользуясь признаком Даламбера.

875. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n}$.

876. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(3n-1)(2n+2)}$.

877. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(3n+1)}$.

878. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$.

879. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

880. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{4^n}$.

881. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{n^n}$.

882. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(n+1)}$.

883. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$.

Решение. 1) Пусть $k\le 0$.

Тогда не выполняется необходимый признак сходимости, так как $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne 0$. В этом случае ряд расходится.

2) Пусть $\kappa=1$.

Исследуем сходимость гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ по признаку Коши:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\left[\ln b-\ln 1\right]=\infty$$

Интеграл расходится, значит и ряд расходится.

3) Пусть $\kappa>1$.

Тогда

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^k}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}x^{-k}dx=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right]_1^b=\frac{1}{1-k}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{x^{k-1}}\right]_1^b=$$

$$=\frac{1}{1-k}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{b^{k-1}}-1\right]=\frac{1}{k-1}$$

Несобственный интеграл сходится, а значит и ряд сходится.

4) Пусть $0<k<1$.

Тогда

$\lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{b^{k-1}}=\infty$ – несобственный интеграл расходится и ряд расходится.

Таким образом, исследуемый ряд сходится при $\kappa>1$ и расходится при $\kappa\le 1$.

884. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$.

Решение. Применим интегральный признак сходимости. Для данного ряда $f(x)=\frac{1}{x(x+3)}$. Вычисляем несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(x+3)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x(x+3)}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\int_1^{b}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[\ln x-\ln(x+3)\right]_1^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{x}{x+3}\right]_1^b=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{b}{b+3}-\ln\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{3}\ln 4.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то по интегральному признаку сходится и исследуемый ряд.

В задачах **885 – 890** исследовать сходимость данных рядов, пользуясь интегральным признаком.

885. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

886. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5n+1}}$.

887. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$.

888. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,ln\,n}$.

889. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,ln^2 n}$.

890. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

891. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Применим признак Коши. Здесь $u_n = \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Тогда $A = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right] = \frac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}e < 1$.

Так как $A < 1$, то ряд сходится.

892. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

893. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Решение. Члены данного ряда монотонно убывают по абсолютной величине: $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Поэтому, согласно признаку Лейбница, данный ряд сходится.

894. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$.

Решение. Члены данного ряда монотонно возрастают по абсолютной величине: $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Условия признака Лейбница не выполняются, данный ряд расходится.

895. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n5^n}$.

Решение. Члены данного знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине: $\frac{1}{5}>\frac{1}{2\cdot 5^2}>\frac{1}{3\cdot 5^3}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n5^n}=0$.

По признаку Лейбница ряд сходится.

Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, также сходится по признаку Даламбера:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 5^n}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5(n+1)}=\frac{1}{5}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

896. Проверить, что знакочередующийся ряд

$1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots$ сходится и вычислить приближенно его сумму с точностью до 0,001.

Решение. Проверяем сходимость ряда по признаку Лейбница: убеждаемся, что его члены монотонно убывают по абсолютной величине и что

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}=0$, значит, ряд сходится.

Знакочередующийся ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница, обладает следующим свойством: Если сумму S этого ряда заменить n–й частичной суммой S_n, то есть отбросить остаток $R_n=S-S_n$, то при этом будет допущена погрешность, абсолютная величина которой меньше абсолютной величины первого отброшенного члена, то есть u_{n+1}.

Вычисляем несколько последовательных членов данного ряда, пока не получим такой член, абсолютное значение которого меньше 0,001:

$$u_1=1\ ;\quad u_2=-\frac{1}{18}\ ;\quad u_3=\frac{1}{600}\ ;\quad u_4=-\frac{1}{35280}.$$

Согласно указанному выше свойству сходящихся знакочередующихся рядов, для вычисления искомой суммы с точностью до 0,001 достаточно взять сумму трех первых членов ряда:

$$1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots\approx 1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}\approx 0{,}946.$$

897. Сколько членов сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ достаточно учесть, чтобы допущенная ошибка была по абсолютной величине меньше 0,001 ?

Решение. $u_6 = -\frac{1}{6!} = -\frac{1}{720}$; $u_7 = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < 0{,}001$.

Следовательно, достаточно ограничиться суммой первых шести членов.

898. Исследовать сходимость ряда $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} + \frac{1}{8} - \ldots$.

Решение. Положительные члены ряда образуют сходящуюся геометрическую прогрессию $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, сумма которой равна 2. Аналогично, отрицательные члены образуют сходящуюся геометрическую прогрессию $-\frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \ldots$, сумма которой равна $-\frac{1}{2}$.

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно и его сумма равна $\frac{3}{2}$.

899. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Решение. Данный знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница. Члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают: $1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1} = 0$.

По признаку Лейбница ряд сходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится (проверяется по интегральному признаку).

Следовательно, данный ряд сходится условно.

В задачах **900 – 905** исследовать сходимость следующих знакочередующихся рядов.

900. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

901. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$.

902. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$. **903.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{ln(n+1)}$.

904. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)!}$. **905.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$.

906. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2-2i}{1\cdot 3}+\frac{(2-2i)^2}{2\cdot 3^2}+\frac{(2-2i)^3}{3\cdot 3^3}+\ldots+\frac{(2-2i)^n}{n\cdot 3^n}+\ldots .$$

Решение. Находим модуль комплексного числа $2-2i$:

$$|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}.$$

Составим ряд из модулей членов данного ряда и исследуем его на сходимость по признаку Даламбера:

$$\frac{\sqrt{8}}{1\cdot 3}+\frac{(\sqrt{8})^2}{2\cdot 3^2}+\frac{(\sqrt{8})^3}{3\cdot 3^3}+\ldots+\frac{(\sqrt{8})^n}{n\cdot 3^n}+\ldots ;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{8})^{n+1}n\cdot 3^n}{(\sqrt{8})^n(n+1)\cdot 3^{n+1}}=\frac{\sqrt{8}}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{\sqrt{8}}{3}<1.$$

Так, предел существует и меньше единицы, то ряд, составленный из модулей членов данного ряда, сходится. Поэтому и данный ряд тоже сходится.

907. Исследовать сходимость ряда

$$(1+i)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}i\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}i\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}i\right)+\ldots .$$

Решение. Составим ряд из действительных частей членов данного ряда: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots$. Он сходится и его сумма равна $\frac{4}{3}$ (как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

Подобным образом ряд $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots$, составленный из коэффициентов при мнимой части членов данного ряда, сходится к числу $\frac{5}{4}$.

Следовательно, исследуемый ряд с комплексными членами сходится и его сумма равна $\frac{4}{3}+\frac{5}{4}i$.

908. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4\,i)^n}{2^n}$.

909. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\,i\right)$.

10. 2. Функциональные ряды

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$, члены которого являются функциями переменной x , называется *функциональным*.

При различных значениях x из функционального ряда получаем различные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

Совокупность значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости*.

910. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x-3}{1\cdot 4}+\frac{(x-3)^2}{2\cdot 4^2}+\frac{(x-3)^3}{3\cdot 4^3}+\ldots+\frac{(x-3)^n}{n\cdot 4^n}+\ldots\ .$$

Решение. Для определения области сходимости данного ряда применим признак Даламбера, а затем те значения x, для которых этот признак не решает вопроса о сходимости ряда $(q=1)$, исследуются особо, при помощи других признаков сходимости рядов.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}n4^n}{(n+1)4^{n+1}(x-3)^n}\right|=\frac{|x-3|}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x-3|}{4}.$$

Ряд сходится абсолютно, если $\frac{|x-3|}{4}<1$, то есть при $-1<x<7$.

Исследуем сходимость данного ряда при $x=-1$ и $x=7$.

При $x=-1$ имеем сходящийся знакочередующийся ряд

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots\ .$$

При $x=7$ получаем расходящийся гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ .$$

Итак, данный ряд сходится при $-1\le x<7$.

10. 2. 1. Степенные ряды

Ряд $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n , \qquad (10.\ 8)$$

где x – переменная величина; a_n , x_o – числа, называется *степенным.*

Для $x_o = 0$ получаем степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. (10. 9)

Областью сходимости степенного ряда называется множество значений x, для каждого из которых степенной ряд, став числовым, сходится.

Областью сходимости этого ряда является интервал $(-R; R)$ числовой оси, где R – *радиус сходимости* ряда, находимый по формуле

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| . \qquad (10.\ 10)$$

Если ряд (10. 9) сходится только при $x = 0$, то $R = 0$. Если же он сходится при любом значении x, то $R = \infty$.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_o и ее окрестности все производные до (n + 1)-го порядка включительно, то она может быть разложена в ряд по формуле *Тейлора*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots . \qquad (10.11)$$

Если в выражении (10. 11) положить $x_o = 0$, то получим ряд *Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots . \qquad (10.\ 12)$$

Ниже приведены разложения в ряд Маклорена часто используемых функции:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots , \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (10.\ 13)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots , \ (-\infty < x < \infty) (10.14)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots , \quad (-\infty < x < \infty) \qquad (10.\ 15)$$

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n+...$$

(-1< x <1), (10. 16)

$$ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+..., \quad -1<x\le 1. \qquad (10. 17)$$

911. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$.

Решение. По формуле (10. 10) находим радиус сходимости R:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n}=2.$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно на интервале (- 2; 2). Исследуем ряд на границах найденного интервала, в точках $x=-2$ и $x=2$.

При $x=-2$ получаем числовой знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку Лейбница (члены этого ряда монотонно убывают по абсолютной величине и общий член ряда стремится к нулю).

При $x=2$ получаем расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Следовательно, областью сходимости данного ряда является полуоткрытый интервал $-2\le x<2$.

912. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Следовательно, ряд сходится при любом значении x.

913. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{3^n + 5^n}$.

Решение. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \left(3^{n+1} + 5^{n+1}\right)}{\left(3^n + 5^n\right) 2^{n+1}} =$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 1\right]}{5^n\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{n} + 1\right]} = \frac{5}{2}.$$

Следовательно, $\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ – интервал сходимости данного ряда.

Исследуем границы найденного интервала.

При $x = \dfrac{5}{2}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{3^n + 5^n}$. Так как

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n}{3^n + 5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n}{5^n\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{n} + 1\right]} = 1$, то для этого ряда не выполняется необходимый признак сходимости, поэтому он расходится.

При $x = -\dfrac{5}{2}$ получаем числовой расходящийся знакочередующийся ряд (для него не выполняется признак Лейбница).

Следовательно, областью сходимости данного ряда является открытый интервал $\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

В задачах **914 – 922** найти области сходимости данных рядов.

914. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\, 3^n}$. **915.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.

916. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$. **917.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\, x^n}{3^n \cdot 2^{n-1}}$.

918. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$.

919. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

920. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$.

921. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2x-3)^n}{2n-1}$.

922. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

923. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = x\cos 2x$.

Решение. Искомый ряд найдем умножением на x ряда для $\cos 2x$, получаемого из ряда Маклорена для $\cos x$ при замене x на $2x$.

$$x\cos 2x = x\left[1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots\right] =$$

$$x - \frac{2^2 x^3}{2!} + \frac{2^4 x^5}{4!} - \frac{2^6 x^7}{6!} + \dots ,$$

$(-\infty < x < \infty)$.

924. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. Применим формулу (10. 17):

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots , \quad \ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

.

Тогда

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) -$$

$$- \left(-\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots .$$

925. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos(-3x)$.

926. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \sin^2 x$.

927. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Указание. Воспользоваться формулой (10. 16) биномиального ряда.

928. Функцию $f(x)=ln\,x$ разложить в ряд по степеням $x-1$.

Решение. В формуле (12. 17) $ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$, где $-1<x\le 1$, заменим x на $x-1$. Получаем

$$ln\,x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots,\ \text{где}\ \ 0<x\le 2.$$

929. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\frac{sin\,4x}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Данный интеграл – «неберущийся», поэтому, пользуясь рядом (10. 14) Маклорена для *sinx*, заменяя в нем x на $4x$, имеем:

$$sin\,4x=4x-\frac{(4x)^3}{3!}+\frac{(4x)^5}{5!}-\frac{(4x)^7}{7!}+\ldots.$$

Тогда

$$\frac{sin\,4x}{x}=4-\frac{4^3x^2}{3!}+\frac{4^5x^4}{5!}-\frac{4^7x^6}{7!}+\ldots.$$

Имеем $$\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\frac{sin\,4x}{x}dx=\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\left[4-\frac{4^3x^2}{3!}+\frac{4^5x^4}{5!}-\frac{4^7x^6}{7!}+\ldots\right]dx=$$

$$=\left[4x-\frac{4^3x^3}{3!\cdot 3}+\frac{4^5x^5}{5!\cdot 5}-\frac{4^7x^7}{7!\cdot 7}+\ldots\right]_0^{\frac{1}{4}}=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\frac{1}{35280}+\ldots\approx$$

$$\approx 1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}\approx 0{,}946.$$

Четвертый член этого знакочередующегося сходящегося ряда меньше 0,001. Поэтому для вычисления искомого приближенного значения интеграла достаточно взять сумму трех первых членов ряда.

930. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Данный интеграл – «неберущийся», воспользуемся рядом (10. 13) Маклорена для e^x, заменяя в нем x на $-x^2$:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}.+..+(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}+\ldots\ .$$

Тогда

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{10}}{5!}+\ldots\right)dx\ =$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\frac{x^9}{4!\cdot 9}-\frac{x^{11}}{5!\cdot 11}+\ldots\right]_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\ldots\ .$$

Полученный знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница. Так как шестой член ряда по абсолютной величине меньше 0,001, то для обеспечения требуемой точности достаточно учесть только сумму первых пяти членов.

Следовательно,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\ \approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}\approx 0{,}747\,.$$

В задачах **931 – 933** разложением соответствующих функций в ряд Маклорена вычислить приближенно определенные интегралы с точностью до 0,001.

931. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$. **932.** $\int_0^{0,25}\frac{\sin 4x}{x}dx$. **933.** $\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

934. Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного решения $y(x)$ дифференциального уравнения $y''=xy'-y+e^x$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0)=1;\, y'(0)=0.$

Решение. По условию задачи $x_o=0$, поэтому частное решение ищем в виде $y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots$.

Находим $y''(0)=0\cdot 0-1+e^0=0$;

$y'''(x) = y' + xy'' - y' + e^x = xy'' + e^x$; $y''''(x) = y'' + xy''' + e^x$; $y'''(0) = 1$; $y^{(4)}(0) = 1$.

Итак,

$$y(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots \ .$$

935. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = 2y - y' + x^3 - e^{x-2}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(2) = 1$, $y'(2) = 3$.

Решение. Будем искать частное решение $y(x)$ в виде степенного ряда (10. 8), расположенного по степеням $(x-2)$, то есть положим в этом разложении $x_o = 2$. Так как $y(2)$ и $y'(2)$ известны, то, подставив их в данное уравнение, находим $y''(2)$ = 6. Определим значения $y'''(2)$ и $y''''(2)$, дважды дифференцируя данное уравнение и вычисляя значения производных при $x = 2$.

$$y''' = 2y' - y'' + 3x^2 - e^{x-2} \ ; \quad y'''(2) = 11;$$

$$y'''' = 2y'' - y''' + 6x - e^{x-2} \ ; \quad y''''(2) = 12.$$

Подставив найденные значения производных в (10.8), получаем искомое частное решение

$$y(x) = 1 + \frac{3}{1!}(x-2) + \frac{6}{2!}(x-2)^2 + \frac{11}{3!}(x-2)^3 + \frac{12}{3!}(x-2)^4 + \ldots \ .$$

В задачах **936 – 938** найти три первые отличные от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y(x)$, являющейся решением данного уравнения, удовлетворяющего указанным начальным условиям.

936. $y' = x^2 y^2 - e^x$; $y(0) = 0$.

937. $y' = 3e^x - y^2 \cos x$; $y(0) = 1$.

938. $y'' = x^2 y - y'$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

939. Найти область сходимости ряда с комплексными членами

$$1 + (1+i)z + (1+2i)z^2 + (1+3i)z^3 + \ldots + (1+ni)z^n + \ldots \ .$$

Решение. Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$1 + \sqrt{2}\,|z| + \sqrt{5}\,|z|^2 + \sqrt{10}\,|z|^3 + \ldots + \sqrt{1+n^2}\,|z|^n + \sqrt{1+(n+1)^2}\,|z|^{n+1} + \ldots \ .$$

Исследуем сходимость этого ряда по признаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+(n+1)^2}\,|z|^{n+1}}{\sqrt{1+n^2}\,|z|^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+n^2+2n+1}{1+n^2}}\cdot|z| = 1\cdot|z| = |z| < 1 .$$

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно во всех точках плоскости xOy, расположенных внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат.

940. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n (z-i)^n$.

Решение. В нашем случае $a_n = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n$, $a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^{n+1}$.

Тогда $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{3}{\left|\sqrt{3}+i\right|} = \frac{3}{\sqrt{3+1}} = 1{,}5$.

Следовательно, областью сходимости ряда является круг $|z-i| < 1{,}5$, то есть круг с центром в точке (0; 1) радиуса 1,5.

941. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+i)\,z^n$.

942. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+ni}{3^n}\,z^n$.

10. 2. 2. Тригонометрические ряды. Ряды Фурье

Функциональный ряд называется *тригонометрическим*, если членами ряда являются синусы и косинусы кратных значений аргумента x, то есть ряд вида

$$\frac{a_o}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots =$$

$$= \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right). \qquad (10.\ 18)$$

Рядом Фурье для функции $f(x)$, периодической с периодом $T = 2\pi$, называется тригонометрический ряд (10. 18), коэффициенты которого (*коэффициенты Фурье*) находятся по следующим формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ n = 0,1,2,...\ , \tag{10. 19}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\ ,\ n = 1,2,3,... \tag{10. 20}$$

Условия разложимости функции в ряд Фурье определяются следующей теоремой.

Теорема. *Если периодическая функция* $f(x)$ *с периодом* $T = 2\pi$ *на отрезке* $[-\pi;\pi]$ *непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода и если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция* $f(x)$ *монотонна, то ряд Фурье для этой функции сходится при всех значениях* x *и сумма полученного ряда равна значению функции* $f(x)$ *в точках ее непрерывности. В точках разрыва функции сумма ряда равна среднему арифметическому односторонних пределов функции в этих точках.*

Если разлагаемая в ряд Фурье функция $f(x)$ *нечетная*, то в формуле (10. 19) подынтегральная функция – нечетная и коэффициенты $a_n = 0$, а

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx . \tag{10. 21}$$

Если же $f(x)$ − функция *четная*, то $b_n = 0$, а

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx\ . \tag{10. 22}$$

Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом $T = 2l$, то коэффициенты ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{10. 23}$$

определяются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} dx; \tag{10. 24}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (10.25)$$

Если функция $f(x)$ – нечетная, то $a_n = 0$:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (10.26)$$

Если функция $f(x)$ – четная, то $b_n = 0$:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (10.27)$$

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l;l]$ и не является периодической, то ее разложение в ряд Фурье находится так же, как и в случае периодической функции, то есть по формулам (10. 24) – (10. 25).

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и не является периодической, то для ее разложения в ряд Фурье нужно перенести начало координат в точку a, то есть положить $x = X + a$. Обозначив $b - a = l$, получаем функцию $F(X) = f(X + a) = f(x)$, заданную на отрезке $[0;l]$. Эту функцию можно разложить в ряд по синусам или косинусам, а затем, заменив X на x-a, получаем искомое разложение.

943. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2\pi$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi & при \quad -\pi \le x \le 0 \\ \pi - x & при \quad 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

Решение. Данная функция удовлетворяет условиям теоремы о разложимости в ряд Фурье. Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_o = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi\, dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)dx\right] = \frac{1}{\pi}\left\{[\pi x]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{(\pi - x)^2}{2}\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{3\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi\cos nxdx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nxdx\right] = \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nxdx .$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям.

Пусть $u = \pi - x$, $dv = \cos nxdx$. Тогда $du = -dx$, $v = \frac{\sin nx}{n}$.

Имеем

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\pi \sin nxdx + \int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nxdx\right] = -\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nxdx =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{n} & при\ n - нечетном \\ \frac{1}{n} & при\ n - четном \end{cases}.$$

Итак, разложение данной функции в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \left(-\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right)$$

.

944. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$, где $-\pi \le x \le \pi$, периодическую с периодом $T = 2\pi$.

Решение. Так как данная функция – четная, то коэффициенты $b_n = 0$.

Коэффициенты a_n находим по формуле (10. 22).

$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nxdx = \frac{2}{\pi}\left[x^2 \cdot \frac{\sin nx}{n} + 2x \cdot \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{2\sin nx}{n^3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{n^2}\cos n\pi .$$

Следовательно, $f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right)$.

945. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2\pi$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & при \quad -\pi \le x \le 0 \\ 0 & при \quad 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

946. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2\pi$ функцию $f(x)=\dfrac{x}{2}$ при $-\pi \le x \le \pi$.

947. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2\pi$ функцию $f(x)=|x|$ при $-\pi \le x \le \pi$.

948. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } -2 \le x < 0 \\ x \text{ } при \text{ } 0 \le x \le 2 \end{cases}$, периодическую с периодом $T = 4$.

Решение. По формулам (10. 24) и (10. 25) находим коэффициенты Фурье:

$$a_o = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{2} x dx\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0 \cdot cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} x cos\frac{n\pi x}{2}dx\right] = \frac{1}{2}\left[x \cdot \frac{sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n^2\pi^2}{4}}\right] =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(cos\,\pi x - 1) = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi^2} & при \text{ } n \text{ } нечетном \\ 0 & при \text{ } n \text{ } четном \end{cases}.$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0 \cdot sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} x sin\frac{n\pi x}{2}dx\right] = \frac{1}{2}\left[-x \cdot \frac{cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n^2\pi^2}{2}}\right]_0^2 =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}cos\,n\pi$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу (10. 23), получим следующее разложение данной функции в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}cos\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\left(sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}sin\frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{4}sin\frac{4\pi x}{2} + \ldots\right).$$

949. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = 2$, заданную на отрезке [- 1; 1] уравнением $f(x)=\begin{cases} -1 & при\ -1 \le x < 0 \\ 1 & при\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$.

950. Разложить функцию $f(x) = x$ на отрезке [0; 1] в ряд по синусам.

Решение. Продолжим функцию нечетным образом на отрезке [-1;0], получаем на отрезке [-1; 1] нечетную функцию, совпадающую с данной на отрезке [0; 1]. Для вычисления коэффициентов Фурье применяем формулу (10. 26).

$$b_n = 2\int_0^1 x \sin n\pi x\, dx = 2\left[-x \cdot \frac{\cos n\pi x}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right]_0^1 = -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & при\quad n\quad нечетном \\ -\dfrac{2}{n\pi} & при\quad n\quad четном \end{cases}.$$

Тогда искомое разложение имеет следующий вид:

$$x = \frac{2}{\pi}\left(\sin \pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x - \frac{1}{4}\sin 4\pi x + \ldots\right).$$

951. Разложить функцию $f(x) = x^2$ на отрезке $[0; \pi]$ в ряд по косинусам.

952. Разложить функцию $f(x) = 2x - 3$ на отрезке [5; 9] в ряд по косинусам.

Решение. Пусть $x = X + 5$, где $0 \le X \le 4$. Тогда

$$f(x) = 2x - 3 = 2(X + 5) - 3 = 2X + 7 = F(X).$$

Продолжим функции $F(X)$ на отрезке [– 4; 0] четным образом и разложим ее в ряд Фурье. Находим коэффициенты разложения:

$$a_o = \frac{2}{4}\int_0^4 (2X + 7)dX = \frac{1}{2}\left[X^2 + 7X\right]_0^4 = 22;$$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_0^4 (2X+7)\cos\frac{n\pi X}{4}dX = \frac{1}{2}\left[(2X+7)\cdot\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi X}{4}\right]_0^4 + \left[\frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi X}{4}\right]_0^4 =$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\dfrac{32}{n^2\pi^2} & \text{при } n \text{ нечетном} \\ 0 & \text{при } n \text{ четном} \end{cases}.$$

Имеем $F(X) = 11 - \dfrac{32}{\pi^2}\left(\cos\dfrac{\pi X}{4} + \dfrac{1}{3^2}\cos\dfrac{3\pi X}{4} + \dfrac{1}{5^2}\cos\dfrac{5\pi X}{4} + \ldots\right).$

Заменив в полученном разложении X на $x - 5$, получаем искомое разложение данной функции:

$$f(x) = 11 - \frac{32}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi(x-5)}{4} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi(x-5)}{4} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi(x-5)}{4} + \ldots\right].$$

953. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x - 3 & \text{при} \quad 2 \le x < 4 \\ -\dfrac{3}{2}x + 9 & \text{при} \quad 4 \le x \le 6 \end{cases}$ на отрезке $[2; 6]$ в ряд по синусам.

Решение. Перенесем начало координат в точку $x = 2$ и введем новую переменную X. Положим $x = X + 2$. Тогда

$$F(X) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}X & \text{при} \quad 0 \le X < 2 \\ -\dfrac{3}{2}X + 6 & \text{при} \quad 2 \le X \le 4 \end{cases}.$$

По формуле (10. 26) находим коэффициенты Фурье:

$$b_n = \frac{2}{4}\left[\int_0^2 \frac{3}{2}X\sin\frac{n\pi X}{4}dX + \int_2^4\left(-\frac{3}{2}X + 6\right)\sin\frac{n\pi X}{4}dX\right] =$$

$$= \frac{3}{4}\left[-X\cdot\frac{4}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi X}{4} + \frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi X}{4}\right]_0^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[-\left(-\frac{3}{2}X + 6\right)\cdot\frac{4}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi X}{4} - \frac{24}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi X}{4}\right]_2^4 =$$

$$= -\frac{6}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2} + \frac{12}{n^2\pi^2}sin\frac{n\pi}{2} + \frac{6}{n\pi}cos\frac{n\pi}{2} + \frac{12}{n^2\pi^2}sin\frac{n\pi}{2} = \frac{12}{n^2\pi^2}sin\frac{n\pi}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{24}{n^2\pi^2} & при \quad n = 4k-3,\, где \quad к - натуральное\, число, \\ -\frac{24}{n^2\pi^2} & при \quad n = 4k-1,\, где \quad к - натуральное\, число, \\ 0 & при \quad n \quad четном. \end{cases}$$

Следовательно,

$$F(X) = \frac{24}{\pi^2}\left(sin\frac{\pi X}{4} - \frac{1}{3^2}sin\frac{3\pi X}{4} + \frac{1}{5^2}sin\frac{5\pi X}{4} - \dots \right).$$

Заменим в функции $F(X)$ переменную X на $x-2$, получаем искомое разложение данной функции:

$$f(x) = \frac{24}{\pi^2}\left(sin\frac{\pi(x-2)}{4} - \frac{1}{3^2}sin\frac{3\pi(x-2)}{4} + \frac{1}{5^2}sin\frac{5\pi(x-2)}{4} - \dots \right).$$

954. Функцию $f(x) = \frac{x}{2}$ разложить в ряд Фурье на отрезке [-1; 1].

955. Функцию $f(x) = 2x - 6$ разложить в ряд Фурье по косинусам на отрезке [3; 5] .

Ответы

Глава 1

2. $6-3i$. **3.** 34. **4.** $34+2i$. **5.** $9+95i$. **6.** $-\dfrac{1}{17}+\dfrac{13}{17}i$. **7.** $\dfrac{7}{41}-\dfrac{19}{41}i$.

8. $-\dfrac{4}{11}+\dfrac{7}{11}i$. **10.** $2\pm 2i$. **11.** $-\dfrac{3}{4}\pm\dfrac{\sqrt{119}}{4}i$. **12.** $6-3i$. **13.** 34.

14. $34+2i$. **15.** $9+95i$. **16.** $-\dfrac{1}{17}+\dfrac{13}{17}i$. **17.** $\dfrac{7}{41}-\dfrac{19}{41}i$. **18.** $-\dfrac{4}{11}+\dfrac{7}{11}i$.

20. $7i$. **23.** $4(\cos 0+i\sin 0)$. **24.** $\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$. **25.** $\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}$.

26. $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$. **28.** $32i$. **30.** $1; i; -1; -i$.

31. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; $\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right)$;

$\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{12}+i\sin\dfrac{19\pi}{12}\right)$.

32. $\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}$; $-i$; $\dfrac{i-\sqrt{3}}{2}$.

Глава 2

36. *а*) $0; \dfrac{1}{7}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{3}{19}; \dfrac{1}{7}; \ldots$ *б*) $-\dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{6}; -\dfrac{1}{7}; \dfrac{1}{8}; -\dfrac{1}{9}; \ldots$ **38.** *а*) $\dfrac{n}{3n+1}$;

б) $\dfrac{1}{n(2n+1)}$; *в*) $(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n^2}{3^n}$. **52.** 0. **53.** 0,5. **54.** 0. **55.** -1. **56.** ∞.

57. ∞. **58.** 2. **59.** $\dfrac{3}{4}$. **60.** 32. **61.** 4. **72.** 5. **73.** $\dfrac{4}{3}$. **74.** 3. **75.** 0.

76. 6. **77.** $\dfrac{2}{3}$. **83.** e^3. **84.** e^2. **85.** e^5. **86.** e^{-8}. **91.** α – второго порядка малости относительно β. **92.** α – третьего порядка малости относительно β. **93.** α – второго порядка малости относительно β.

97. $-\dfrac{1}{7}$.

98. $\dfrac{8}{3}$. **99.** $\dfrac{1}{3}$. **100.** $\dfrac{m}{n}$. **103.** Предел слева $+\infty$, справа $-\infty$. **104.** Предел слева 0, справа $+\infty$. **105.** $\dfrac{1}{30}$ слева и справа. **110.** При $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;\infty)$ функция непрерывна; $x=3$ – точка разрыва второго рода. **111.** $x=0$ – точка разрыва первого рода. **112.** $x=2$ – точка разрыва первого рода, скачок функции - 7. **113.** Функция непрерывна на всей числовой оси.

Глава 3.

126. $y'=3x^2 ctg\left(x^3+2\right)$. **127.** $y'=5ctg5x$.

128. $y'=3\left(2^{arctg\sqrt{x}}+1\right)^2\cdot 2^{arctg\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$. **129.** $y'=\dfrac{3e^{sin\,3x}cos\,3x}{1+e^{2\,sin\,3x}}$.

130. $y'=-\dfrac{2(3x+1)}{x^3\sqrt{4x+1}}$. **131.** $y'=\dfrac{x\,ln\,x}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}$. **145.** $y'=\dfrac{sin\,x+3x^2}{3y^2-sec^2\,y}$.

146. $y'=\dfrac{y^2\,sec^2\,x+sin(x-y)}{sin(x-y)-2ytgx}$. **147.** $y'=-\dfrac{3x^2+2xy}{x^2+2y}$.

148. $y'=\dfrac{y+2x^3y+2xy^3}{x-x^4-x^2y^2}$. **149.** $y'=\dfrac{yctg\dfrac{y}{x}+x^2e^{x+y}}{xctg\dfrac{y}{x}-x^2e^{x+y}}$. **153.** $y'=-tgt$.

154. $y'=-\dfrac{b}{a}$. **155.** $y'=\dfrac{cos\,t-sin\,t}{cos\,t+sin\,t}$. **156.** $y'=tg2t$. **161.** $y'''=-4\,sin\,2x$.

162. $y'''=-\dfrac{1}{x^2}$. **163.** $y'''=e^{-x}(3-x)$. **164.** $y'''=\dfrac{2\,cos\,x}{sin^3\,x}$.

165. $y'''=\dfrac{4a^3}{\left(x^2+a^2\right)^2}$. **171.** 0,24. **172.** $dy=5\left(cos\,5x+2xe^{-x^2}\right)dx$.

173. $dy=-\dfrac{1}{2\,sin\dfrac{x}{2}}dx$. **174.** $dy=\dfrac{2}{x^2-1}dx$. **175.** $dy=-\dfrac{3x^2+y}{x+2y}dx$.

176. $d^3y\approx-0{,}004$.

Глава 4.

185. $\frac{1}{6}$. **186.** $-\frac{1}{8}$. **187.** 0. **188.** $\frac{2}{\pi}$. **189.** 0. **190.** $-\frac{2}{\pi}$. **191.** 0. **192.** 1.
201. $y_{min} = y(1) = 3$. **202.** $y_{min} = y(0) = -5$; $y_{max} = y(-3) = 8{,}5$.
203. $y_{max} = y(-1) = y(1) = 4$; $y_{min} = y(0) = 3$. **204.** $y_{max} = y(-1) = -12$; $y_{min} = y(5) = 24$. **205.** $y_{min} = y(-0{,}5 ln 2) = 2\sqrt{2}$. **206.** $y_{min} = y(1) = 1$.
207. $y_{max} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi - 2}{4}$; $y_{min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 - \pi}{4}$.
208. $y_{min} = y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6}$; $y_{max} = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$. **216.** $R = \frac{18}{\pi + 4}$.
217. $\frac{n}{2}$ и $\frac{n}{2}$. **218.** $H = \frac{l\sqrt{3}}{3}$. **219.** $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\sqrt{2}\pi}}$. **220.** Стороны прямоугольника параллельны осям эллипса и равны $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$. **221.** 10 см.
222. $\frac{a}{2}$ и $\frac{a}{2}$. **223.** $R = H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, где R – радиус основания, H – высота.
224. $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, $H = 2R$. **225.** 6 × 6 × 3 *дм*. **226.** $R = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$.
227. $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$, $H = \frac{4}{3}R$. **231.** **.** Интервалы: выпуклости – $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$, вогнутости – $\left(\frac{5}{3}; \infty\right)$. Точка перегиба $\left(\frac{5}{3}; -\frac{250}{27}\right)$. **232.** Интервалы: выпуклости – $(2;4)$, вогнутости – $(-\infty;2) \cup (4;\infty)$. Точки перегиба $(2;62)$, $(4;206)$. **233.** График вогнутый; точек перегиба нет. **234.** Интервалы: выпуклости – $(-\infty;-1) \cup (1;\infty)$, вогнутости – $(-1;1)$. Точки перегиба $(-1; ln 2)$, $(1; ln 2)$. **236.** $a = -1{,}5$; $b = 4{,}5$. **241.** $x = 1$; $y = x - 1$.
242. $x = 0$; $y = 1$. **243.** $x = -1$; $x = 0{,}5$; $y = 0$. **248.** $y_{min} = y(0) = 0$, $y_{max} = y(4) = 10\frac{2}{3}$, $A\left(2; 5\frac{1}{3}\right)$ – точка перегиба. **249.**
$y_{min} = y(-2) = y(2) =$

$=-4$, $y_{max}=y(0)=0$, $P_1\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};-\frac{20}{9}\right)$ и $P_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{20}{9}\right)$ – точки перегиба.

250. $y_{min}=y(0)=-1$, $P_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{1}{2}\right)$ и $P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{1}{2}\right)$ – точки перегиба, $y=1$ – асимптота. **251.** $y_{min}=y(0)=-1$; $P\left(-\frac{1}{2};-\frac{8}{9}\right)$ – точка перегиба; $x=1$ и $y=0$ – асимптоты. **252.** $y_{max}=y(0)=0$, $x=-1$, $x=1$ и $y=0$ – асимптоты. **253.** $y_{max}=y(e)=\frac{1}{e}$, $P\left(e^{3/2};\frac{3}{2}e^{-3/2}\right)$ – точка перегиба; $y=0$ – асимптота. **254.** $y_{min}=y(0)=0$, $P_1(-1;ln2)$ и $P_2(1;ln2)$ - точки перегиба. **255.** $y_{min}=y\left(e^{-0,5}\right)=-\frac{2}{e}$; $P\left(\frac{1}{e\sqrt{e}};-\frac{6}{e^3}\right)$ – точка перегиба.

256. $y_{max}=y\left(e^2\right)=\frac{2}{e}$; $P\left(e^{8/3};\frac{8}{3}e^{-4/3}\right)$ – точка перегиба; $x=0$ – асимптота. **257.** $y_{max}=y\left(-1-\sqrt{2}\right)$, $x=-1$, $x=1$ – асимптоты. **258.** $y_{max}=$ $=y(0)=1$, $P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ и $P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба, $y=0$ – асимптота. **259.** $y_{min}=y(0)=0$,
$y_{max}=y(2)=\frac{4}{e^2}$, точки перегиба при $x=2\pm\sqrt{2}$, $x=0$ – асимптота.

260. $y_{max}=y(-1)=\frac{\pi}{2}-1$; $y_{min}=y(1)=1-\frac{\pi}{2}$; $O(0;0)$ – точка перегиба; $y=x-\pi$ и $y=x+\pi$ – асимптоты. **261.** $y_{max}=y(-3)=-3\frac{3}{8}$; $O(0;0)$ – точка перегиба; $x=-1$ и $y=\frac{1}{2}x-1$ – асимптоты. **265.** $-\frac{192}{125}$.

266. $\frac{3}{5\sqrt{10}}$. **267.** $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **268.** 2. **269.** $\frac{24}{125}$. **270.** $\frac{\varphi^2+2}{a\left(\varphi^2+1\right)^{3/2}}$.

271. 1. **272.** $\frac{5\sqrt{5}}{4}$. **273.** $2\sqrt{2}$. **274.** $\frac{125}{16}$. **275.** $\frac{80\sqrt{10}}{3}$. **277.** $(-2;3)$.

278. $\left(0;1\frac{1}{3}\right)$. **279.** $\left(\frac{\pi-6}{4};-\sqrt{2}\right)$. **280.** $\left(-5\frac{1}{2};5\frac{1}{3}\right)$. **281.** $\left(\frac{43}{68};\frac{26}{51}\right)$.

284. $Y^2=\frac{16}{27}X^3$. **285.** $\sqrt[3]{X^2}-\sqrt[3]{Y^2}=\sqrt[3]{4}$. **286.** $\sqrt[3]{4X^2}+\sqrt[3]{Y^2}=\sqrt[3]{9}$.

287. $X=a\cos t$; $Y=a\sin t$. **289.** Прямая, проходящая через начало координат и образующая с осями координат равные углы. **290.** Прямая, проходящая через начало координат и образующая с осями координат равные углы. **293.** $\frac{x-\frac{a}{2}}{-\sqrt{3}}=\frac{y-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{z-a\pi}{6}$. **294.**

$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-2\sqrt{2}}{0}=\frac{z-2}{1}$.

295. $M_1(0;0;-1)$ и $M_2\left(\frac{2}{3};-\frac{8}{9};-\frac{1}{27}\right)$. **296.** $2x-2\sqrt{3}z+3\pi=0$.

Глава 5.

309. $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}-\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$. **310.** $5\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+C$.

311. $2\arcsin\frac{x}{3}+\cos x+C$. **312.** $\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{5}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C$. **313.** $e^x+\operatorname{tg}x+C$.

314. $\cos x-\operatorname{ctg}x+C$. **315.** $\arcsin^2 x+C$. **316.** $-3\cos\left(x^2+3\right)+C$.

317. $\frac{1}{4\cos^2 x}+C$. **318.** $\frac{2}{3}\left(1+e^x\right)\sqrt{1+e^x}+C$. **319.** $\arcsin\frac{\operatorname{tg}x}{5}+C$.

320. $\arcsin e^x+C$. **321.** $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x^3-5}{x^3+5}\right|+C$. **322.** $\ln\left(e^x\sqrt{e^{2x}+1}\right)+C$.

323. $\ln\left(\sin x+\sqrt{\sin^2 x+3}\right)+C$. **324.** $\ln\left(3+\sin^2 x\right)+C$.

326. $\left(x^2-5x+9\right)\cdot e^x+C$. **327.** $\frac{1}{27}\left(2-9x^2\right)\cos 3x+6x\sin 3x+C$.

328. $\left(x^2-2\right)\sin x+2x\cos x+C$. **329.** $-e^{-x}\left(x^2+5\right)+C$.

338. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **339.** $-e^{-x}(x+1)+C$.

340. $x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}+C$. **341.** $\frac{3^x}{\ln 3}\left(x-\frac{1}{\ln 3}\right)+C$.

342. $\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$. **343.** $\frac{1}{2}e^{x}(\sin x-\cos x)+C$. **346.** $\frac{1}{5-x}+C$.

347. $\frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C$. **348.** $\frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C$. **349.** $\frac{1}{5}ln\left|\frac{x-2}{3x-1}\right|+C$.

350. $\frac{1}{\sqrt{5}}arg\,tg\frac{3x-1}{\sqrt{5}}+C$. **351.** $\frac{1}{4}arg\,tg\frac{2x+1}{2}+C$.

353. $\frac{1}{2}ln\left(x^2+6x+25\right)-arctg\frac{x+3}{4}+C$. **354.** $\frac{3}{4}ln\left(2x^2-4x+3\right)+$. $+\sqrt{2}arctg\sqrt{2}(x-1)+C$. **355.** $ln\left(x^2+2x+5\right)+\frac{3}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C$.

356. $ln\sqrt{2x^2+x+1}+\frac{5}{\sqrt{7}}arctg\frac{4x+1}{\sqrt{7}}+C$. **358.** $ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+10}\right|+C$.

359. $arcsin\frac{x+2}{3}+C$. **360.** $\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{3}{2}ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+C$.

361. $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right|+C$.

362. $\sqrt{x^2-10x+29}+3ln\left|x-5+\sqrt{x^2-10x+29}\right|+C$.

363. $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2-6x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{1}{3}}\right)+C$. **366.** $-arcsin\frac{1}{x}+C$.

367. $-arcsin\frac{2-x}{\sqrt{2}(x-1)}+C$. **368.** $ln\left|\frac{x+1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\right|+C$.

369. $ln\left|\frac{x-2}{1+\sqrt{4x-x^2-3}}\right|+C$. **376.** $\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{3}ln\left|\frac{x^3}{(x+1)(x-2)^2}\right|+C$.

377. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$. **378.** $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|+$ $+\frac{16}{13}ln|x+2|+C$. **379.** $\frac{5}{6}ln|x|+\frac{9}{10}ln|x-2|-\frac{26}{15}ln|x+3|+C$.

380. $-\dfrac{7}{2(x-2)^2}-\dfrac{2}{x-2}+C$. **381.** $\dfrac{3}{2(x+1)}+\dfrac{1}{4}ln\left|(x+1)(x-1)^3\right|+C$.

382. $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4}{3}x^3+6x^2+30x-\dfrac{27}{x-2}+72\,ln|x-2|+C$.

383. $-\dfrac{9}{2(x-3)}-\dfrac{1}{2(x+1)}+C$. **384.** $\dfrac{1}{2}ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+\dfrac{6}{\sqrt{5}}arctg\dfrac{x}{\sqrt{5}}+C$.

385. $\dfrac{3x-17}{2\left(x^2-4x+5\right)}+\dfrac{1}{2}ln\left(x^2-4x+5\right)+\dfrac{15}{2}arctg(x-2)+C$.

390. $sin\,x-\dfrac{sin^3 x}{3}+C$. **391.** $\dfrac{cos^5 x}{5}-\dfrac{cos^3 x}{3}+C$.

392. $\dfrac{1}{5cos^5 x}-\dfrac{1}{3cos^3 x}+C$. **393.** $-\dfrac{1}{sin\,x}-2\,sin\,x+\dfrac{sin^3 x}{3}+C$.

394. $\dfrac{1}{16}x-\dfrac{1}{64}sin\,4x-\dfrac{1}{48}sin^3 2x+C$. **395.** $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}sin\,2x+C$.

396. $\dfrac{1}{16}x-\dfrac{1}{64}sin\,4x+\dfrac{1}{48}sin^3 2x+C$. **397.**
$\dfrac{1}{128}\left(3x-sin\,4x+\dfrac{1}{8}sin\,8x\right)+C$.

400. $\dfrac{1}{6}cos\,3x-\dfrac{1}{10}cos\,5x+C$. **401.** $\dfrac{1}{6}sin\,3x+\dfrac{1}{4}sin\,x+\dfrac{1}{20}sin\,5x+C$.

402. $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}sin\,2x+\dfrac{1}{16}sin\,4x+\dfrac{1}{24}sin\,6x+C$. **404.** $\dfrac{1}{3}ln\left|\dfrac{tg\dfrac{x}{2}-2}{2tg\dfrac{x}{2}-1}\right|+C$.

405. $ln\left|\dfrac{tg\dfrac{x}{2}-5}{tg\dfrac{x}{2}-3}\right|+C$. **406.** $x+\dfrac{2}{1+tg\dfrac{x}{2}}+C$. **407.** $\dfrac{1}{2}arctg\left(2tg\dfrac{x}{2}\right)+C$.

411. $2\,arcsin\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$. **412.** $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

413. $\sqrt{x^2-4}-arccos\dfrac{2}{x}+C$. **414.** $2\,arcsin\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{4}\left(2-x^2\right)\sqrt{4-x^2}+C$.

415. $\dfrac{1}{20}arctg\dfrac{5x}{4\sqrt{9-x^2}}+C$. **416.** $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C$. **419.** $3\,ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+C$.

420. $\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right]+C$. **421.**
$6\left[\frac{\sqrt[3]{x+2}}{2}+\sqrt[6]{x+2}+ln\left|\sqrt[6]{x+2}-1\right|\right]+C$.
422.
$\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}-\frac{3}{4}(x+1)^{4/3}+\frac{6}{7}(x+1)^{7/6}-x+\frac{6}{5}(x+1)^{5/6}-\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}+C$.
425. $\frac{1}{4}ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}arctg\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$. **426.**
$\frac{8}{77}\left(7\sqrt{x}-4\right)\left(1+\sqrt{x}\right)^{7/4}+C$.

427. $\frac{1}{10}ln\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^5}-1\right)^2}{\left(\sqrt[3]{1+x^5}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^5}+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}arctg\frac{2\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}}+C$.

428. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}-21arctg\sqrt[6]{x}+C$.

429. $\frac{8}{77}\left(7\sqrt{x}-4\right)\left(1+\sqrt{x}\right)^{7/4}+C$. **430.** $\frac{3}{22}\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^{11}-\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^{8}+$
$+\frac{3}{10}\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^{5}+C$. **431.** $-\frac{\left(\sqrt{1+x^4}\right)^5}{10x^{10}}+\frac{\left(\sqrt{1+x^4}\right)^3}{3x^6}-\frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2}+C$.

Глава 6.

440. $\frac{2}{3}$. **441.** $\frac{2}{3}$. **442.** $\frac{98}{3}$. **443.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **444.** 6. **445.** 0. **446.** 0. **450.** 1.
451. 1. **452.** $\frac{e^{\pi}+1}{2}$. **457.** Расходится. **458.** Расходится. **459.** $\frac{\pi}{4}$.
460. $\frac{\pi}{2}$. **461.** Расходится. **462.** $2\frac{2}{3}$. **465.** 1,12. **467.** 1,371. **470.** 4,5.
471. 36. **472.** $10\frac{2}{3}$. **473.** $\frac{4}{3}+2\pi$. **474.** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **475.** 1. **476.** 19,2.

477. 8. **478.** 4,5. **481.** $3\pi a^2$. **482.** 169π. **485.** $\frac{1}{8}\pi a^2$. **486.** $\frac{1}{4}\pi a^2$.

487. $3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$. **488.** $18\pi a^2$. **493.** $\frac{64}{15}\pi$. **494.** $\frac{16}{15}\pi$. **495.** 16π.

496. $0{,}3\pi$. **497.** $\frac{17}{15}\pi$. **498.** πab. **499.** $8{,}1\pi$. **500.** $\frac{64}{3}\pi$. **501.** π.

502. $6\pi^3 a^3$. **505.** $2\sqrt{2} + ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$. **507.** $6a$.

509. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)$. **511.** $\frac{728}{9}\pi$. **512.**

$\frac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi$.

513. $\frac{62}{3}\pi$. **514.** $2\pi\left[\sqrt{2} + ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$. **516.** $29{,}6\pi$. **518.** $C\left(\frac{2R}{\pi}; \frac{2R}{\pi}\right)$.

521. $C\left(\frac{\pi-2}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$. **522.** $C\left(0; \frac{8}{5}\right)$. **523.** $C\left(\frac{2a}{5}; \frac{2a}{5}\right)$. **524.** $C\left(\frac{a}{5}; \frac{a}{5}\right)$.

527. 23,7 *м.* **530.** 1,59 *н.* **531.** 78480 *н.* **533.** $\frac{1}{4}\pi\rho q R^4$. **535.** 0,18 *дж.*

Глава 7.

541. Совокупность точек, лежащих на осях координат и внутри первой и третьей четвертей. **542.** Все точки плоскости xOy, исключая точки прямой $y = x$. **543.** Все точки плоскости xOy, исключая начало координат.

544. Совокупность точек, лежащих внутри и на границе круга с центром в начале координат радиуса 2. **545.** Совокупность точек, лежащих выше параболы $y = -\frac{1}{2}x^2$. **546.** Все точки плоскости xOy, исключая точки прямых $x = 1$; $y = 0$. **547.** Точки квадрата, образованного прямыми $x = \pm 1$; $y = \pm 1$ $\left(-1 \le x \le 1;\ \ -1 \le y \le 1\right)$. **548.** Совокупность точек, расположенных на окружности с центром в начале координат радиуса 1 и внутренних точек кольца, ограниченного этой окружностью и окружностью с центром в начале координат радиуса 5. **549.** Полоса, заключенная между прямыми $y = \pm 1$, включая эти прямые $\left(-1 \le y \le 1\right)$. **556.** Непрерывна на плоскости xOy, кроме точек прямой $y = 2x$. **557.** Непрерывна на плоскости xOy, кроме точек окружности радиуса 3 с центром в начале координат. **558.** Непрерывна на плоскости xOy, кроме начала координат.

564. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\ln y+5$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{y}-\frac{1}{1+y^2}$. **565.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$. **570.** $\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}$. **572.** *а*)

$dz=\left(3x^2y+tgy\right)dx+\left(x^3+x\sec^2 y\right)dy$

б) $dz=\left(\sin y+e^x y^3\right)dx+\left(x\cos y+3y^2e^x\right)dy$. **575.** Увеличится приблизительно на 157 см^3. **579.** $\frac{dz}{dt}=e^{t^3}\left(\sin 2t+3t^2\sin^2 t\right)$. **580.** $\frac{du}{dt}=4t^3$.

582. $\frac{dz}{dx}=e^{x\sin x}\left(\sin x+x\cos x\right)$. **584.** $\frac{\partial z}{\partial x}=xy\left(2\ln\frac{x}{y}+1\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\left(\ln\frac{x}{y}-1\right)$.

586. $\frac{dy}{dx}=\frac{2-x}{y+3}$. **587.** $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(x-y)-y\cos x}{\sin x+\sin(x-y)}$. **588.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{ye^x}{e^x+e^y}$.

589. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2+xy+y^2}$. **592.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z-3x^2}{4z-x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6y-1}{4z-x}$.

593. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz}{z^2+xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{z^2+xy}$. **594.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{e^z-xy}$.

597. $9\bar{i}-3\bar{j}$. **599.** $\cos\alpha\approx 0{,}99$; $\alpha\approx 8^\circ$. **601.** 5. **604.** $2x+4y-z-6=0$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-6}{-1}$. **605.** $3x+4y-5z=0$; $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{-5}$.

606. $4x-4y+z-10=0$. **608.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2}{1-2y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{4x}{(1-2y)^2}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8x^2}{(1-2y)^3}$. **609.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2\left(y - x^2\right)}{\left(x^2 + y\right)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{\left(x^2 + y\right)^2}$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{\left(x^2 + y\right)^2}$. **610.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a^2 \cos 2(ax + by)$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2ab \cos 2(ax + by)$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b^2 \cos 2(ax + by)$. **615.** $z_{max} = z(0; 3) = 9$. **616.**
$z_{min} = z(-4; 1) = -1$.
617. $z_{min} = z(1; 1) = -1$. **619.** $z_{наиб.} = z(4; 0) = 13$; $z_{наим.} = z(1; 2) = -4$.
620. $z_{наиб.} = 4$; $z_{наим.} = -36$. **621.** D (2; 1). **625.** (1; 1) – минимум; z =2.
627. $a = 1{,}9$; $b = 1{,}6$.

Глава 8.

633. $\ln y = tg \frac{x}{2}$. **637.** $arctg\, x + arctg\, y = C$. **638.** $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$.
639. $y = C \sec x - 1$. **640.** $y = C \sin x$. **641.** $x^2 - y^2 = 1$. **642.**
$y^2 = \ln \frac{1 + e^x}{2}$.
643. $\cos x = \sqrt{2} \cos y$. **644.** $y = 2\sin^2 x - \frac{1}{2}$. **645.** $y = 1$.
649. $tg \frac{x + y}{2} = x + C$. **650.** $3y - \ln|9x + 3y + 1| = C$.
651. $2\sqrt{2x + y - 3} - 4\ln\left(\sqrt{2x + y - 3} + 2\right) = x + C$. **652.** $y = e^x - 3$. **653.**
$y = \frac{6}{x}$
654. $y = \frac{1}{2}x^3$. **655.** Через 1000 лет. **656.** 100 *г*. **659.**
$y^2 + 2xy - x^2 = C$.
660. $x^2 + y^2 = Cy$. **661.** $y = x \ln^2|Cx|$. **662.** $y^2 = 2x^2 \ln Cx$.
664. $(y - x)^2 = Cy$. **665.** $y = \frac{2x}{1 - x}$. **668.** $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 1$. **669.** $y = \frac{x}{\cos x}$.

670. $y=2(\sin x-1)$. **671.** $y=2x-x^2$. **674.** $y^2=\dfrac{1}{1+Ce^{x^2}}$.

675. $y=\dfrac{1}{e^x\left(e^x-C\right)}$. **676.** $y=-\dfrac{2}{x\left(\ln^2 x+C\right)}$. **677.** $y=\dfrac{4x}{4C-x^4}$.

679. $y=\dfrac{1}{2}\left(x^2-1\right)\operatorname{arctg}x-\dfrac{x}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C_1x+C_2$. **680.**
$y=(x-2)e^x+C_1x+C_2$

681. $y=(x+2)e^{-x}+C_1x+C_2$. **682.** $y=x^3-\sin x+4x+2$.

683. $y=-\dfrac{1}{2}\ln^2 x-\ln x+2x+1$. **686.** $y=(\arcsin x)^2+C_1\arcsin x+C_2$.

687. $y=-\dfrac{1}{4}x^2+C_1\ln x+C_2$. **688.** $y=C_1\ln x+C_2$.

689. $y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$. **690.** $y=\dfrac{x^3}{12}-\dfrac{x}{4}+C_1\operatorname{arctg}x+C_2$.

691. $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$. **693.** $y=C_2e^{C_1x}$. **694.** $C_1x+C_2=\ln\left|\dfrac{y}{y+C_1}\right|$.

695. $y=\dfrac{1}{4}C_1(x+C_2)^2+\dfrac{1}{C_1}$. **696.** $\dfrac{1}{1-y}=C_1x+C_2$.

697. $\ln(2y+3)=2(C_1x+C_2)$. **698.** $\ln y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. **699.**
$y=\ln|x-1|$.

700. $y=\sqrt{2x-x^2}$. **701.** $y=x^3+3x+1$. **704.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.

705. $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$. **706.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$.

707. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$. **708.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

709. $y=C_1+C_2e^{-2x}$. **710.** $y=4e^{-2x}+8xe^{-2x}$. **711.** $y=2-e^{5x}$.

712. $y=e^{-x}(2\cos 2x+\sin 2x)$. **713.** $y=e^x(2\cos x+\sin x)$.

719. $y=C_1+C_2e^{3x}+x^2$. **720.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}-2x^2+x-1$.

721. $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}-2x-\dfrac{4}{3}$. **722.** $y=C_1+C_2e^{-x}+2x^3-6x^2+5x$.

723. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}-2e^{3x}$. **724.** $y=e^{2x}\left(C_1+C_2x+\dfrac{1}{2}x^2\right)$.

725. $y=C_1+C_2e^{-5x}-\dfrac{1}{5}xe^{-5x}$. **726.** $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+1)$.

727. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x(2\sin 3x - 3\cos 3x)$.
728. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x)$.
729. $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} - 0{,}6\cos x + 0{,}8\sin x$.
730. $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \cos x + 2\sin x$.
731. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}\sin x$. **732.** $y = C_1 x + C_2 e^{-x} - \cos x - x\sin x$.
733. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\cos x + x^2 \sin x$.
734. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{5}{4} - \frac{1}{12}e^{-2x}$.
735. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x - e^{-x}$.
736. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x - e^{-x}$.
737. $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x$. **738.** $y = \sin 2x + 2x$.
739. $y = -2e^{-x} + 4e^{2x} + 3xe^{2x}$. **740.** $y = \cos 2x + \frac{1}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x$.
741. $y = -x(\cos 2x + 2\sin 2x) + \frac{1}{2}\sin 2x$.
742. $y = -4 + 2e^{x} + e^{-x}(-2\cos x + \sin x)$.
743. $y = 3{,}5e^{x} - 9{,}8e^{0{,}5x} + 0{,}3\cos x - 0{,}1\sin x + 2x + 6$.
744. $y = e^{-x}\left(\cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{4}\left(2x - 1 + e^{2x}\right)$.
747. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x|$.
748. $y = (C_1 + C_2 x)e^{x} + xe^{x}\ln|x|$. **749.**
$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \cdot \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$.
750. $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2 \ln|x| - \frac{3}{4}x^2\right) \cdot e^{-2x}$. **753.**
$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$.
754. $y = C_1 + e^{3x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$. **755.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3$.
756. $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(C_2 \cos\sqrt{3}x + C_3 \sin\sqrt{3}x\right)$.
759. $y = 0{,}4\cos x - 0{,}2\sin x + 0{,}1e^{2x} - 0{,}5$.

760. $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3 + \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x$.

761. $y = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \frac{x^3}{6} \right) \cdot e^x$.

762. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{2x} + \frac{1}{8}\left(2x^2 + 4x + 11\right)$.

763. $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x \sin x$.

764. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + x^2(x-3) + xe^{-x}$. **766.** $x = -te^{3t}$; $y = e^{3t}(1-t)$.

767. $x = e^t + e^{3t}$; $y = e^t + 2e^{3t}$. **768.** $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)e^{t\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-t\sqrt{2}}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{t\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t\sqrt{2}}$. **769.** $x = e^t + \cos t$; $y = -e^t - 3\cos t - \sin t$.

Глава 9

772. 86. **773.** 14. **774.** $\ln\frac{25}{14}$. **775.** 14. **776.** $\frac{\pi}{12}$. **778.** $\frac{3}{8}$. **779.** $2\frac{14}{15}$.

782. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx$. **783.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} dy$. **784.** $\int\limits_1^3 dy \int\limits_1^{(y+1)/2} dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_{(y-2)/2}^{2} dx$.

785. $\int\limits_0^{48} dy \int\limits_{y/12}^{\sqrt{y/3}} dx$. **787.** $\frac{\pi}{3}$. **788.** 8. **789.** $\frac{2\pi}{3}$. **791.** 2. **792.** $6 - 4\ln 2$.

793. 4. **794.** $10\frac{2}{3}$. **795.** $\sqrt{2} - 1$. **796.** $0{,}5 - \frac{1}{e}$. **799.** πab. **800.** $8\pi + 9\sqrt{3}$

802. 8π. **803.** $13\frac{1}{3}$. **804.** $144\pi - 192$. **807.** $2\sqrt{2}\pi$. **809.** $\frac{\sqrt{2}}{3}ka^3$.

812. $\left(\frac{5}{14}, \frac{19}{18}\right)$. **813.** $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{15}\right)$. **814.** $\left(\frac{5a}{36}, 0\right)$. **817.** $\frac{1}{8}$. **818.** $\frac{160}{63}$.

821. $\frac{1}{8}$. **822.** $\frac{56}{3}$. **824.** 8. **825.** $\frac{\pi}{6}\left(8\sqrt{2} - 7\right)$. **827.** $\frac{49}{6}$. **830.** 1.

831. $\frac{56}{3}$. **834.** $\left(0, 0, \frac{2}{3}\right)$. **835.** $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$. **839.** $ln 9$. **840.** $-\frac{3}{16}\pi a^2$.
841. – 3,5. **843.** 1,9. **844.** 3. **847.** 0. **849.** 128.
852. $x^4 y^3 - sin 2y + e^{2x} + C$. **853.** $arctgx - ln x + x ln y + C$.

Глава 10

855. $\frac{5}{2}; \frac{8}{5}; \frac{11}{10}; \frac{14}{17}; \frac{17}{26}$. **857.** $\frac{n}{2n-1}$. **858.** $\frac{n}{n+1}$. **859.** $\frac{2n}{2n+1}$. **860.** $\frac{1}{n\sqrt{n}}$.
863. Не выполняется. **864.** Выполняется. **865.** Выполняется.
866. Выполняется. **875.** Сходится. **876.** Сходится. **877.** Расходится.
878. Расходится. **879.** Сходится. **880.** Сходится. **881.** Расходится.
882. Расходится. **885.** Сходится. **886.** Расходится. **887.** Сходится.
888. Расходится. **889.** Сходится. **890.** Сходится. **892.** Сходится.
900. Сходится условно. **901.** Сходится абсолютно. **902.** Сходится абсолютно. **903.** Сходится условно. **904.** Сходится абсолютно. **905.** Расходится. **908.** Расходится. **909.** Сходится. **914.** $[-3, 3)$. **915.** $(-1, 1)$.
916. $[-1; 1)$. **917.** $(-6, 6)$. **918.** $x = 0$. **919.** $(-1, 1)$. **920.** $(-1, 1]$.
921. $(1, 2]$. **922.** $[-1, 1]$. **925.** $1 - \frac{3^2 x^2}{2!} + \frac{3^4 x^4}{4!} - \frac{3^6 x^6}{6!} + \ldots$.
926. $\frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \frac{2^7 x^8}{8!} + \ldots$.
927. $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \ldots$. **931.** 0,764. **932.** 0,946.
933. 0,487. **936.** $y = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$. **937.** $y = 1 + 2x - \frac{x^2}{2}$.
938. $y = 1 + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{60}$. **941.** $|z| < 1$. **942.** $|z| < 3$.
945. $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(cos x + \frac{1}{3^2}cos 3x + \frac{1}{5^2}cos 5x + \ldots\right) +$
$+ \left(sin x - \frac{1}{2}sin 2x + \frac{1}{3}sin 3x - \frac{1}{4}sin 4x + \ldots\right)$.
946. $f(x) = sin x - \frac{1}{2}sin 2x + \frac{1}{3}sin 3x - \frac{1}{4}sin 4x + \ldots$.

947. $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\ldots\right).$

949. $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin \pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x+\frac{1}{5}\sin 5\pi x+\ldots\right).$

951. $f(x)=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{3^2}\cos 3x-\frac{1}{4^2}\cos 4x+\ldots\right).$

954. $f(x)=\frac{1}{\pi}\left(\sin \pi x-\frac{1}{2}\sin 2\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x-\ldots\right).$

955. $f(x)=2-\frac{16}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi(x-3)}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi(x-3)}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi(x-3)}{2}+\ldots\right).$

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - СПб.: Профессия, 2003.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 1996.

3. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов / под ред. Б.П. Демидовича. - М.: Интеграл-Пресс, 1997.

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Наука, 1990.

5. Лычкин В.Н. Высшая математика: учебное пособие. - М.: ФГОУ ВПО РГАЗУ, 2007.

6. Лычкин В.Н. Высшая математика в задачах: учебное пособие. - М.: ФГОУ ВПО РГАЗУ, 2009.

7. Лычкин В.Н. Высшая математика: учебное пособие. - М.: ФГБОУ ВПО РГАЗУ, 2011.

Лычкин В.Н., Капитонова В.А.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
в задачах и упражнениях

Учебное пособие

Редакторы *Е.Н.Мамаева, Г.И.Мирошина*

Подписано в печать 12.04.13. Формат бумаги 60x84 1/16.
Отпечатано на ризографе.
Печ. л. 16,75. Тираж 300 экз. Заказ

Издательство ФГБОУ ВПО РГАЗУ
143900, Балашиха 8 Московской области